Markku Ekonen
Sanna Hassinen
Katariina Hemmo
Timo Taskinen

LUKION LYHYT MATEMATIIKKA 4

SIGMA

Matemaattinen analyysi

Sanoma Pro Oy • Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-0063-4 Sigma 4

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2342-8
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2344-2

Toimitus: Juho Niemelä
Valokuvat: iStockphoto
Piirrokset: Marja Venäläinen
Typografia: Riitta Piuva
Taitto: Pirjo Seppä
Kansi: Riitta Piuva
Kannen kuva: Getty Images

© Markku Ekonen, Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

1 Polynomifunktion ominaisuuksia 7
1.1 Polynomifunktio 7
Tehtäviä 14
1.2 Polynomifunktion merkki 16
Tehtäviä 26
1.3 Funktion muutosnopeus 30
Tehtäviä 37

2 Derivaatta 43
2.1 Funktion derivaatta 43
Tehtäviä 48
2.2 Derivoimissääntöjä ja -kaavoja 54
Tehtäviä 61
2.3 Derivaatan arvo 63
Tehtäviä 70
2.4 Derivaatan merkki 73
Tehtäviä 81

3 Funktion analysoiminen derivaatan avulla 85
3.1 Funktion kulku 85
Tehtäviä 93
3.2 Funktion ääriarvot 97
Tehtäviä 109
3.3 Derivaatan geometrisia sovelluksia 113
Tehtäviä 120
3.4 Derivaatan sovelluksia talouselämästä 123
Tehtäviä 127

4 Kertausosa 130

5 Ekstrat 142

Tehtävien vastaukset 161

Hakemisto 167

Kirjan käyttäjälle

Matematiikan opetuksen tarkoituksena on rohkaista opiskelijaa oivaltavaan oppimiseen, kehittää matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoa. Sigman rakenne tukee näiden tavoitteiden toteutumista.

Pohdinta

Osa kirjan alaluvuista alkaa pohdintatehtävillä. Niiden tarkoituksena on yleensä johdatella opetettavaan aiheeseen ja herättää kysymyksiä. Opettaja voi käyttää tehtäviä osana opetusta, tai opiskelija voi tutustua tehtäviin itsenäisesti.

Teoria

Teoria on jaettu aihekokonaisuuksiin sivuotsikoiden avulla. Näin eri osa-alueet löytyvät helpommin. Suuremmat kokonaisuudet voidaan otsikoiden avulla jakaa sopiviin opetuskokonaisuuksiin.

Tehtävät

Tehtävät on koottu teorian mukaisten sivuotsikoiden avulla kokonaisuuksiksi, joista on helppo valikoida sopivat tehtävät aihepiirin ja vaikeusasteen mukaan.

120. Vaativammat tehtävät on merkitty väripohjalla.

E1 Joidenkin harjoitustehtävien edessä olevan esimerkkiviittauksen tarkoituksena on tukea harjoittelemista sekä oppitunnilla että kotona. Jokaista kirjan esimerkkiä vastaa tehtäväosiossa samantyyppinen tehtävä.

Kirjassa on mukana vanhoja ylioppilastehtäviä. Ylioppilaskokeen vuosi ja tehtävänumero on ilmoitettu tehtävänannon lopussa, esimerkiksi [S2008, 1].

Sekalaisia tehtäviä

Tehtäväosion lopussa on sekalaisia tehtävä-osio, johon on koottu muutama tehtävä koko luvun aihealueista. Tämän osion tehtäviä voi käyttää esimerkiksi kotitehtävinä.

Keskeisiä käsitteitä

Jokainen luvun lopussa on käsitekartta, joka kokoaa luvun keskeiset käsitteet.

Kertausosa

Kirjan lopussa olevaan kertausosaan on koottu lyhyesti kunkin luvun tärkeimmät asiat. Jokaiseen lukuun liittyy lisäksi kertaustehtäviä. Kertausosan lopussa on myös kolme harjoituskoetta.

Ekstrat

Kirjan loppuun on koottu ekstraluvuksi kurssiin liittyvää oheismateriaalia. Ekstroja voi tarpeen mukaan käyttää joko opetuksessa tai opiskelijan omana lukemistona. Teoriaosassa on viittauksia ekstralukuun.

Helsingissä marraskuussa 2011

Tekijät

Matemaattisen analyysin punainen lanka

Matemaattisen analyysin kurssilla tutkitaan polynomifunktioiden ominaisuuksia sekä ratkaistaan sovelluksia analyysin keinoin.

Kertaa aiemmin opittua

Polynomifunktioiden tutkiminen perustuu polynomien laskutoimitusten hyvään hallintaan sekä yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemiseen. Polynomien laskutoimitukset käsiteltiin jo aiemmin kurssissa Lausekkeet ja yhtälöt, mutta ne kerrataan vielä tämän kurssin alussa.

Keskeiset kysymykset

Kurssilla etsitään vastauksia mm. seuraaviin ongelmiin:

- Mikä on funktion keskimääräinen muutosnopeus?
- Mikä on funktion hetkellinen nopeus jossakin kohdassa?
- Milloin funktio on kasvava tai vähenevä?
- Miten määritetään funktion maksimit ja minimit?
- Mikä on funktion suurin ja pienin arvo?

Keinot

Keskeisiin kysymyksiin etsitään vastauksia määrittämällä funktion hetkellistä kasvu- tai vähenemisnopeutta eri kohdissa. Yleisesti ottaen funktio derivoidaan. Tätä varten ovat olemassa derivoimiskaavat, joiden avulla pystytään derivoimaan mikä tahansa käsiteltävänä oleva funktio.

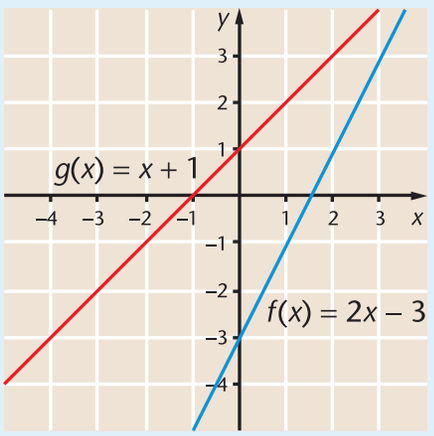
Käytännön sovellukset

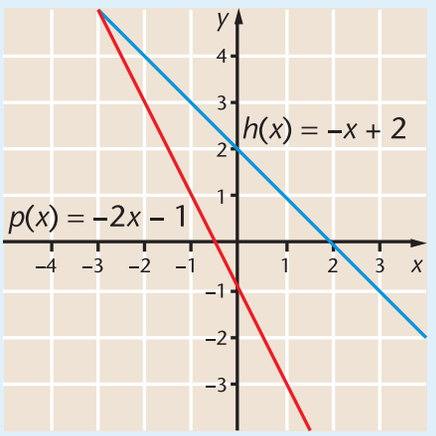
Edellä esitetyt keskeiset kysymykset esiintyvät myös käytännön tilanteissa. Luonnontieteen sovellukset käsittelevät usein kappaleiden liiketilaa: kappaleen radan, nopeuden ja kiihtyvyyden välisiä yhteyksiä. Geometrisissä sovelluksissa oleellista on pinta-alan tai tilavuuden suurimman tai pienimmän arvon määrittäminen. Talouselämän probleemat puolestaan käsittelevät suurimman myyntitulon tai myyntivoiton muodostumista.

1 Polynomifunktion ominaisuuksia

1.1 Polynomifunktio

POHDINTA 1

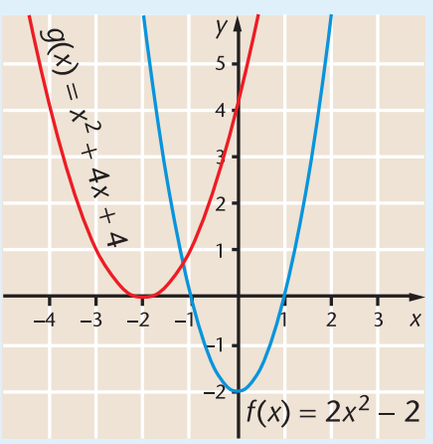


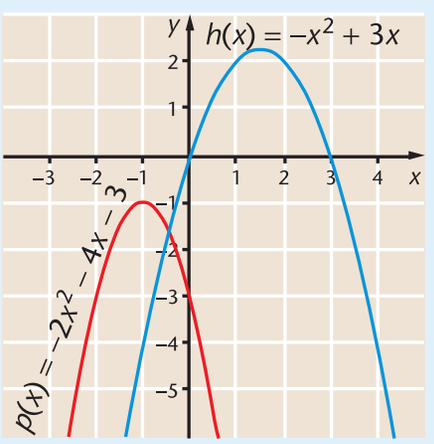


Miten selvität piirtämättä funktion kuvaajaa

- suoran kulkusuunnan
- y-akselin leikkauspisteen
- x-akselin leikkauspisteen?

POHDINTA 2





Miten selvität piirtämättä funktion kuvaajaa

- paraabelin aukeamissuunnan
- y-akselin leikkauspisteen
- x-akselin leikkauspisteet?

Ensimmäisen asteen polynomifunktio

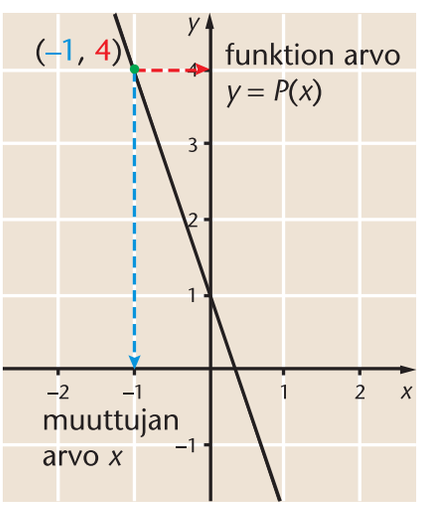
Kahden suureen välistä riippuvuutta kuvaavaa sääntöä kutsutaan matematiikassa **funktioksi**. Jos funktion sääntö voidaan ilmoittaa polynomina, on kyseessä **polynomifunktio**.

Ensimmäisen asteen polynomifunktio sisältää vain ensimmäisen asteen termin ja vakiotermin, joka voi olla myös nolla. Funktio voidaan siis aina sieventää muotoon $P(x) = kx + b$, jossa $k \neq 0$ ja b on mielivaltainen reaaliluku.

Ensimmäisen asteen polynomifunktioita		
$P(x) = kx + b$	k	b
$P(x) = 5x = 5x + 0$	5	0
$P(x) = -3x + 1$	–3	1
$P(x) = 2 - 4x$	–4	2
$P(x) = \frac{2x}{5} + 5 = \frac{2}{5}x + 5$	$\frac{2}{5}$	5

Funktion arvo lasketaan sijoittamalla muuttujan paikalle haluttu luku. Laskemalla funktiolle useita arvoja muodostuu tason pisteiden (x, y) joukko, joiden avulla voidaan piirtää funktion **kuvaaja**.

Funktio $P(x) = -3x + 1$
Muuttujan arvo $x = -1$
Funktion *P* arvo kohdassa $x = -1$ $P(-1) = -3 \cdot (-1) + 1 = 4$
Funktion kuvaajan piste $(x, y) = (x, f(x)) = (-1, 4)$



Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja on **suora** $y = kx + b$. Suoran yhtälössä k on suoran **kulmakerroin** ja b **vakiotermi**.

	Kulmakerroin k	Vakiotermi b
$y = kx + b$	$k > 0$ Suora on nouseva.	Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$.
	$k < 0$ Suora on laskeva.	
	$k = 0$ Suora on x-akselin suuntainen.	

ESIMERKKI 1

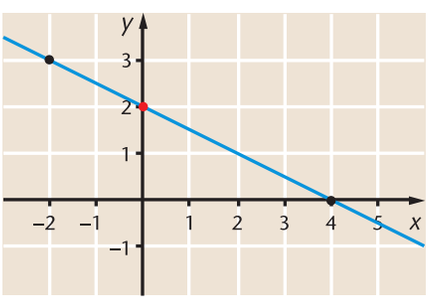
Piirrä funktion $P(x) = 2 - 0{,}5x$ kuvaaja. Onko piste $(118, -59)$ kuvaajalla?

RATKAISU

Suoran piirtämiseen tarvitaan kaksi pistettä, mutta virheiden välttämiseksi kannattaa laskea kolme pistettä. Lasketaan funktion P arvo kolmessa kohdassa.

x	$P(x) = 2 - 0{,}5x$	(x, y)
-2	$P(-2) = 2 - 0{,}5 \cdot (-2) = 3$	$(-2, 3)$
0	$P(1) = 2 - 0{,}5 \cdot 0 = 2$	$(0, 2)$
4	$P(3) = 2 - 0{,}5 \cdot 4 = 0$	$(4, 0)$

Piste $(0, 2)$ saadaan laskematta myös suoran yhtälöstä.



Piste $(118, -59)$ on funktion kuvaajalla, jos $P(118) = -59$. Tutkitaan, toteutuuko ehto.

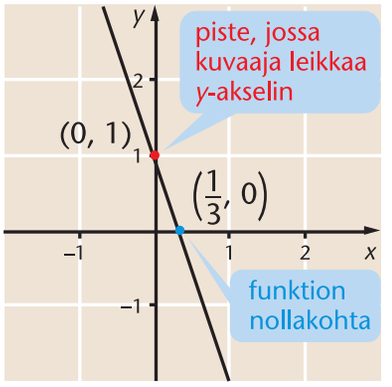
$$P(118) = 2 - 0{,}5 \cdot 118 = -57 \neq -59$$

Piste ei siis ole funktion P kuvaajalla.

VASTAUS

Piste $(118, -59)$ ei ole funktion P kuvaajalla.

Ensimmäisen asteen polynomifunktio leikkaa y-akselin yhdessä pisteessä, jossa $x = 0$. Leikkauspisteen koordinaatit voidaan nähdä jo funktion $P(x) = kx + b$ lausekkeesta.



Funktio P leikkaa x-akselin korkeintaan yhdessä pisteessä, jossa $y = 0$. Tässä pisteessä funktio saa siis arvon nolla, ja vastaavaa muuttujan arvoa sanotaan funktion **nollakohdaksi**.

Nollakohta on ratkaistava yhtälön avulla, ellei tehtävänannossa erityisesti muuta pyydetä.

ESIMERKKI 2

Olkoon $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2x-2}{3}$.

a) Missä pisteessä funktion kuvaaja leikkaa y-akselin?
b) Määritä funktion nollakohta.

RATKAISU

a) Koska y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, leikkauspiste voidaan selvittää laskemalla $f(0)$.

Jotta leikkauspiste nähtäisiin suoraan funktion lausekkeesta, lauseketta olisi sievennettävä.

$$f(0) = \frac{0}{2} - \frac{2 \cdot 0 - 2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$.

b) Nollakohdassa $f(x) = 0$. Ratkaistaan yhtälö poistamalla nimittäjät.

$$\begin{aligned}
&^{3)}\frac{x}{2} - {}^{2)}\frac{2x-2}{3} = 0 \\
&\frac{3x}{6} - \frac{4x-4}{6} = 0 \qquad \big| \cdot 6 \\
&3x - (4x - 4) = 0 \\
&3x - 4x + 4 = 0 \\
&-x = -4 \qquad \big| : (-1) \\
&x = 4
\end{aligned}$$

Kun kerrot nimittäjät pois, lisää sulut merkkivirheiden välttämiseksi.

VASTAUS

a) $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ b) $x = 4$

Toisen asteen polynomifunktio

Toisen asteen polynomifunktio sisältää aina toisen asteen termin, mutta siinä voi olla myös ensimmäisen asteen termi ja vakiotermi. Se voidaan siis aina esittää muodossa $P(x) = ax^2 + bx + c$, jossa $a \neq 0$, mutta b ja c voivat olla mitä tahansa reaalilukuja.

Toisen asteen polynomifunktioita

$P(x) = ax^2 + bx + c$	a	b	c
$P(x) = -8x^2 - x + 5$	-8	-1	5
$P(x) = 6x^2 - 7x$	6	-7	0
$P(x) = -x^2 + 16$	-1	0	16

ESIMERKKI 3

Esitä funktio f polynomina muodossa $f(x) = ax^2 + bx + c$.
a) $f(x) = -2x(4 - x)$ b) $f(x) = (3x - 2)(x - 1)$ c) $f(x) = (5x - 2)^2$

RATKAISU

a) Kun monomi kerrotaan polynomilla, sovelletaan osittelulakia $a(b + c) = ab + ac$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x(4 - x) \\ &= -2x \cdot 4 - 2x \cdot (-x) \\ &= -8x + 2x^2 \\ &= 2x^2 - 8x \end{aligned}$$

Samankantaisten potenssien tulo: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) Kahden polynomin tulossa sovelletaan osittelulakia $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x - 2)(x - 1) \\ &= 3x \cdot x + 3x \cdot (-1) - 2 \cdot x - 2 \cdot (-1) \\ &= 3x^2 - 3x - 2x + 2 \\ &= 3x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

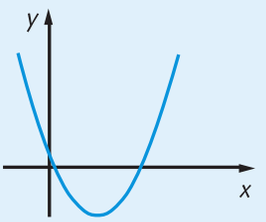
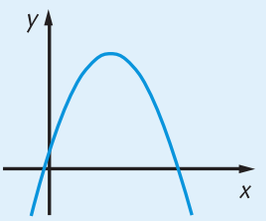
c) Kirjoitetaan potenssi ensin tulona ja sovelletaan sitten osittelulakia.

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x - 2)(5x - 2) \\ &= 5x \cdot 5x + 5x \cdot (-2) - 2 \cdot 5x - 2 \cdot (-2) \\ &= 25x^2 - 10x - 10x + 4 \\ &= 25x^2 - 20x + 4 \end{aligned}$$

VASTAUS

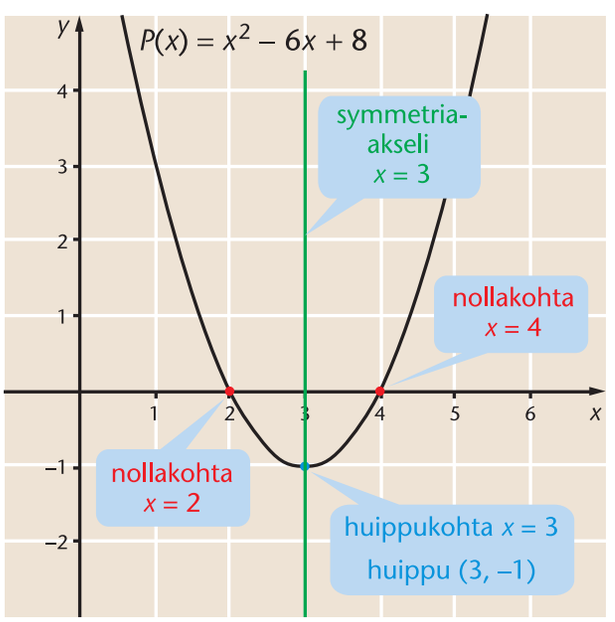
a) $f(x) = 2x^2 - 8x$ b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$
c) $f(x) = 25x^2 - 20x + 4$

Funktion $P(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja on **paraabeli**. Paraabeli aukeaa joko ylös- tai alaspäin. Aukeamissuunta riippuu vakiosta a.

	Vakio a	
$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0$ Paraabeli aukeaa ylöspäin.	
	$a < 0$ Paraabeli aukeaa alaspäin.	

Toisen asteen polynomifunktiolla on enintään kaksi nollakohtaa. Se siis leikkaa x-akselin enintään kahdessa pisteessä. Nollakohdat ratkaistaan toisen asteen yhtälöstä esimerkiksi ratkaisukaavaa käyttäen.

Nollakohtien puolivälissä sijaitsee **paraabelin huippukohta**. Huippukohdalla tarkoitetaan huipun x-koordinaattia. **Huippupisteessä** eli **huipussa** funktion kulkusuunta vaihtuu. Paraabelin **symmetria-akseli** kulkee huippupisteen kautta.



ESIMERKKI 4 Määritä funktion g nollakohdat, kun

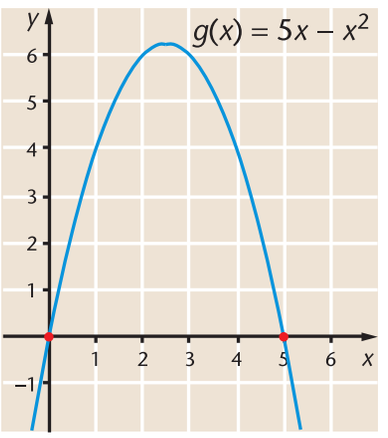
a) $g(x) = 5x - x^2$ b) $g(x) = x^2 + 6x + 9$.

RATKAISU

a) Nollakohdat lasketaan ratkaisemalla yhtälö $g(x) = 0$ eli $5x - x^2 = 0$. Koska yhtälöstä puuttuu vakiotermi, yhtälö voidaan ratkaista erottamalla yhteinen tekijä x ja käyttämällä sitten tulon nollasääntöä.

$5x - x^2 = 0$
$5x - x \cdot x = 0$
$x(5 - x) = 0$

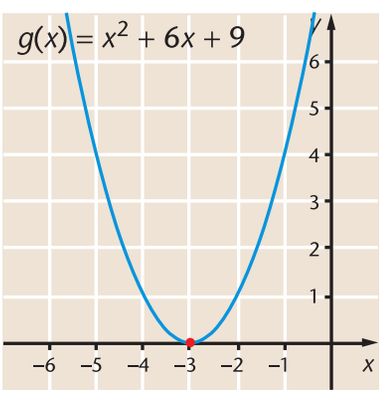
$$5x - x^2 = 0$$
$$x(5 - x) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 5 - x = 0$$
$$-x = -5 \quad | : (-1)$$
$$x = 5$$



b) Ratkaistaan yhtälö $x^2 + 6x + 9 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x = \frac{-6}{2} = -3$$

$ax^2 + bx + c = 0$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$



VASTAUS a) $x = 0$ tai $x = 5$ b) $x = -3$

Tehtäviä

Ensimmäisen asteen polynomifunktio

1. Määritä suoran kulkusuunta.
   a) $y = -2x + 1$ b) $y = 0{,}4x$ c) $y = 3$

2. Laske $f(-2)$, kun
   a) $f(x) = -3x - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$ c) $f(x) = 10 - 6x$

E1 3. Piirrä funktion f kuvaaja. Onko piste $(-16, 67)$ kuvaajalla?
   a) $f(x) = 2x - 6$ b) $f(x) = 3 - 4x$

4. Laske ensimmäisen asteen polynomifunktion nollakohta.
   a) $f(x) = -6x$ b) $f(x) = -3x + 9$ c) $f(x) = 4x - 5$

E2 5. Olkoon $g(x) = 2x - \frac{3x - 2}{4}$.
   a) Missä pisteessä kuvaaja leikkaa y-akselin?
   b) Määritä funktion nollakohta.

6. Määritä funktion $g(x) = -\frac{3}{4}x - 6$ kuvaajan ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

7. Missä pisteessä funktion $f(x) = 2 - \frac{x}{2} + \frac{x - 1}{5}$ kuvaaja leikkaa x-akselin?

Toisen asteen polynomifunktio

8. Määritä paraabelin aukeamissuunta.
   a) $y = 4x^2 + 1$ b) $y = 2x - x^2$
   c) $y = 1 + 4x^2 - x$ d) $y = 3x - 12x^2$

E3 9. Esitä funktio f polynomina muodossa $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   a) $f(x) = (3 - 2x)(3 + 2x)$ b) $f(x) = -6x(4 - x)$
   c) $f(x) = (4x - 3)^2$ d) $f(x) = (7 - x)(4x - 8)$

10. Esitä funktio g polynomina muodossa $g(x) = ax^2 + bx + c$.
    a) $g(x) = \frac{6x^2 - 8x}{2}$ b) $g(x) = \frac{5 - 3x + x^2}{5}$

11. Laske $h\left(\frac{1}{2}\right)$, kun
    a) $h(x) = -x^2 + 3x + 2$ b) $h(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2$

E4 12. Määritä funktion f nollakohdat.

a) $f(x) = -2x^2 + 4x$ b) $h(x) = x^2 - x - 42$

13. Laske toisen asteen polynomifunktion nollakohdat.

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

14. Laske funktion nollakohdat.

a) $f(x) = -10x + 2$

b) $h(x) = 2x^2 + 32x$

c) $g(x) = 7x^2 + 7$

15. Missä kohdassa funktio leikkaa x-akselin?

a) $f(x) = 2x^2 + 2x - 60$ b) $g(x) = x(3x + 9)$

16. Missä pisteessä funktio f leikkaa y-akselin?

a) $f(x) = -x + 3$

b) $f(x) = -x^2 - 5$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x$

Sekalaisia tehtäviä

17. Piirrä funktion f kuvaaja. Onko piste $(-0{,}1;\ 0{,}63)$ kuvaajalla?

a) $f(x) = -0{,}5x + 2$ b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

18. Laske funktion arvo kohdassa $x = -1$.

a) $g(x) = -x + 2$ b) $h(x) = -x^2 + 7x$

c) $r(x) = -2x^3 + x^2 + 3$

19. Laske funktion nollakohdat.

a) $f(x) = -x + 5$

b) $f(x) = x^2 + 11$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

20. Missä pisteissä funktio g leikkaa koordinaattiakselit?

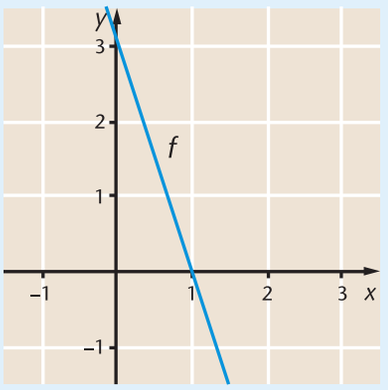
a) $g(x) = \frac{1 - 3x}{2} - x - \frac{1}{3}$ b) $g(x) = x^2 - 5x$

21. Missä pisteessä funktion $f(x) = (x - 2)^2 - (1 - x)$ kuvaaja leikkaa x-akselin?

1.2 Polynomifunktion merkki

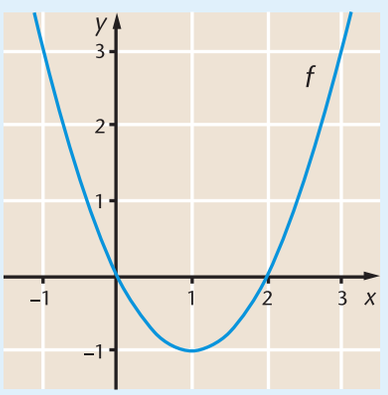
POHDINTA 1

Millaisia arvoja funktio f saa, kun muuttuja x
a) saa pienempiä arvoja kuin 1
b) saa suurempia arvoja kuin 1?



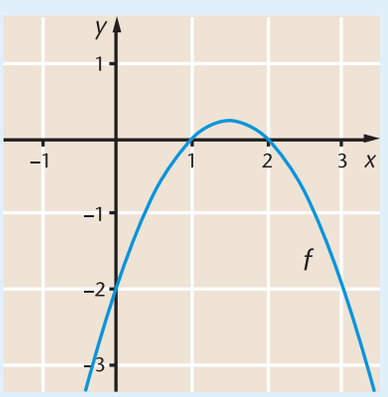
POHDINTA 2

Millaisia arvoja funktio f saa, kun muuttuja x
a) saa arvoja lukujen 0 ja 2 väliltä
b) saa pienempiä arvoja kuin 0
c) saa suurempia arvoja kuin 2?



POHDINTA 3

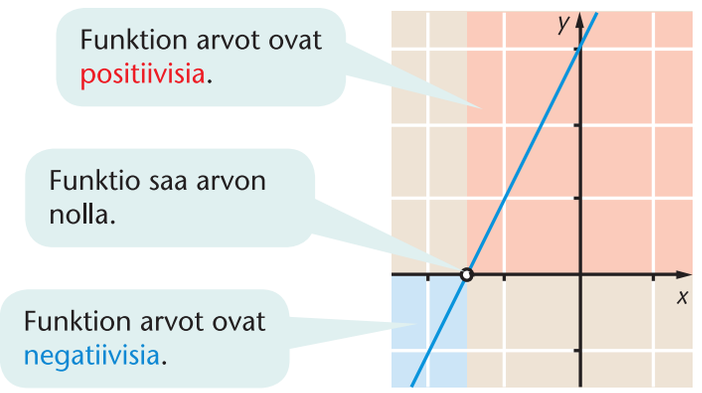
Millaisia arvoja funktio f saa, kun muuttuja x
a) saa arvoja lukujen 1 ja 2 väliltä
b) saa pienempiä arvoja kuin 1
c) saa suurempia arvoja kuin 2?



Ensimmäisen asteen epäyhtälö

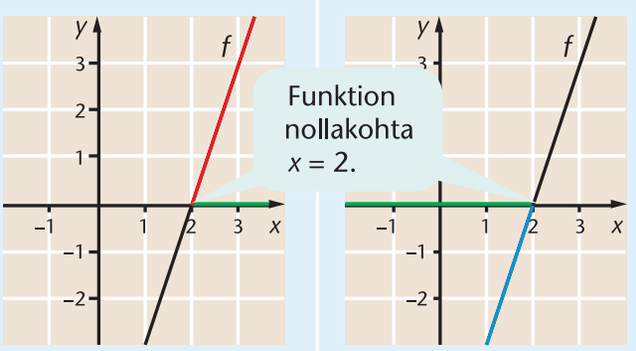
Polynomifunktiota voidaan havainnollistaa xy-koordinaatistossa kuvaajan avulla. Tällöin muuttujan arvot ovat x-koordinaatteja ja funktion arvot y-koordinaatteja.

Kun funktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, kuvaajalla olevien pisteiden y-koordinaattien arvot ovat positiivisia. Tällöin myös funktion arvot ovat positiivisia. Kun funktion arvot ovat negatiivisia, kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.



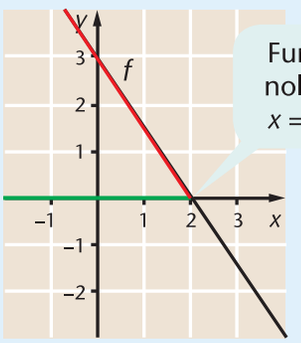
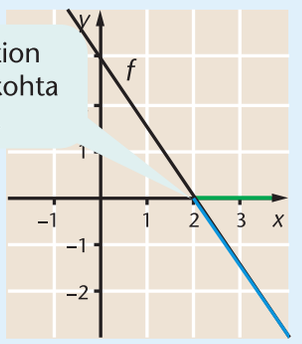
Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja on nouseva tai laskeva suora. Funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja (poikkeuksena x-akselin suuntaiset suorat). **Funktion merkillä** tarkoitetaan funktion arvon positiivisuutta (+) tai negatiivisuutta (–).

Jos suora on nouseva, funktio saa positiivisia arvoja, kun muuttujan arvot ovat suurempia kuin funktion nollakohta. Funktio saa negatiivisia arvoja, kun muuttujan arvot ovat pienempiä kuin funktion nollakohta.

Funktion f kuvaaja		
Funktion merkki	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
Millä muuttujan x arvoilla funktion merkki toteutuu?		
Epäyhtälömerkintä	$x > 2$	$x < 2$
Välimerkintä	$x \in]2, \infty[$	$x \in]-\infty, 2[$

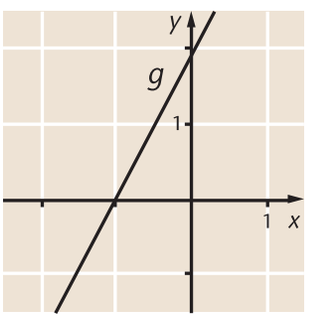
Lukusuoran välit s. 142

Jos suora on laskeva, funktio saa positiivisia arvoja, kun muuttujan arvot ovat pienempiä kuin funktion nollakohta. Funktio saa negatiivisia arvoja, kun muuttujan arvot ovat suurempia kuin funktion nollakohta.

Funktion f kuvaaja		
Funktion merkki	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
Millä muuttujan x arvoilla funktion merkki toteutuu?		
Epäyhtälömerkintä	$x < 2$	$x > 2$
Välimerkintä	$x \in]-\infty, 2[$	$x \in]2, \infty[$

ESIMERKKI 1

Päättele kuvaajan avulla, millä muuttujan x arvoilla $g(x) \leq 0$. Anna vastaus sekä epäyhtälö- että välimerkintänä.

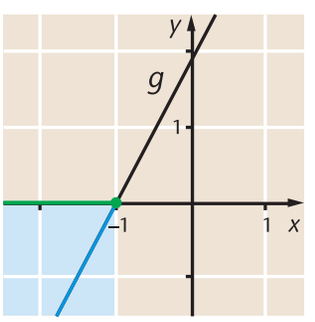


RATKAISU

Funktion x-akselin leikkauskohta on funktion nollakohta.

Kun $g(x) \leq 0$, funktio g saa joko negatiivisia arvoja tai arvon nolla. Kuvasta nähdään, että funktion nollakohta on $x = -1$.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun funktion kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella. Tällöin muuttuja x arvot ovat nollakohtaa pienempiä.



Koska epäyhtälön ratkaisuksi kelpaa myös nollakohta, se voidaan ilmoittaa merkinnällä

$$x \leq -1$$

Ratkaisu voidaan esittää myös puoliavoimen välin avulla seuraavasti:

Lukusuoran väli s. 142

$$x \in]-\infty, -1]$$

VASTAUS

$g(x) \leq 0$ kun $x \leq -1$ eli $x \in]-\infty, -1]$.

ESIMERKKI 2 Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = 5x + 3$ saa positiivisia arvoja?

RATKAISU

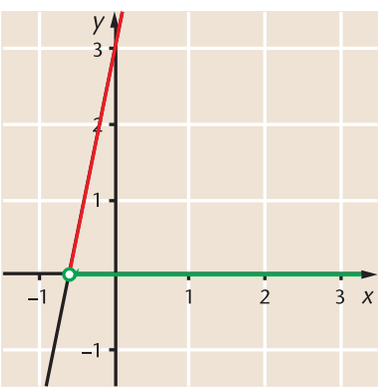
Tapa 1

Ratkaistaan ensin funktion f nollakohta:

$$\begin{aligned} 5x + 3 &= 0 \\ 5x &= -3 \quad | : 5 \\ x &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Suora $y = 5x + 3$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 3)$.

Koska funktion kuvaajan, suoran $y = 5x + 3$, kulmakerroin $k = 5$ on positiivinen, suora on nouseva. Piirretään funktion kuvaaja.



Kun x saa arvoja nollakohdan oikealta puolelta, funktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella eli funktio saa positiivisia arvoja.

$$f(x) > 0, \quad \text{kun } x > -\frac{3}{5}$$

Ratkaisu voidaan ilmoittaa myös välimerkinnän avulla:

$$f(x) > 0, \quad \text{kun } x \in \left]-\frac{3}{5}, \infty\right[$$

Tapa 2

Funktio saa positiivisia arvoja, kun $f(x) > 0$.

Tehtävä voidaan ratkaista etsimällä epäyhtälön $5x + 3 > 0$ ratkaisut. Tämä on ensimmäisen asteen epäyhtälö, jonka ratkaisu on likimain samanlainen kuin vastaavan yhtälön.

$$\begin{aligned} 5x + 3 &> 0 \\ 5x &> -3 \quad | : 5 \\ x &> -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaisu eroaa vastaavan yhtälön ratkaisusta vain silloin, kun epäyhtälön molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla (ks. esimerkki 3).

VASTAUS $f(x) > 0$, kun $x > -\frac{3}{5}$.

Ensimmäisen asteen epäyhtälöt on yleensä nopeinta ja yksinkertaisinta ratkaista muokkaamalla epäyhtälöä muotoon, josta ratkaisu on luettavissa.

1. Tarvittaessa lavennetaan termejä sopivasti, jotta nimittäjät voidaan kertoa pois.

2. Siirretään muuttujatermit epäyhtälön vasemmalle puolelle ja vakiot oikealle puolelle. Yhdistetään samanmuotoiset termit.

3. Jaetaan epäyhtälön molemmat puolet muuttujan kertoimella.

Jos epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta vaihtuu. Merkin suunnan vaihtuminen on helppo perustella kahden luvun vertailulla.

$$\begin{array}{l} 5 < 8 \quad \vert \cdot 2 \\ 10 < 16 \\ \text{tosi} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 < 8 \quad \vert \cdot (-2) \\ -10 < -16 \\ \text{epätosi} \end{array}$$

Väite on tosi, kun epäyhtälömerkin suunta vaihtuu.

ESIMERKKI 3 Ratkaise epäyhtälö $x - \frac{2x-1}{2} \geq 2 + \frac{2x}{3}$.

RATKAISU Epäyhtälössä esiintyy nimittäjiä. Kirjoitetaan kaikille termeille nimittäjä ja lavennetaan termit sitten samannimisiksi. Tämän jälkeen nimittäjät voidaan poistaa kertomalla epäyhtälön molemmat puolet yhteisellä nimittäjällä.

$$\begin{array}{rl} {}^{6)}\frac{x}{1} - {}^{3)}\frac{2x-1}{2} \geq {}^{6)}\frac{2}{1} + {}^{2)}\frac{2x}{3} & \text{Pienin yhteinen nimittäjä on 6.} \\ \frac{6x}{6} - \frac{3(2x-1)}{6} \geq \frac{12}{6} + \frac{4x}{6} \quad \vert \cdot 6 & \\ 6x - 3(2x-1) \geq 12 + 4x & \\ 6x - 6x + 3 \geq 12 + 4x & \\ 6x - 6x - 4x \geq 12 - 3 & \\ -4x \geq 9 \quad \vert :(-4) & \text{Negatiivisella luvulla jaettaessa epäyhtälömerkin **suunta** vaihtuu.} \\ x \leq -\frac{9}{4} & \end{array}$$

VASTAUS $x \leq -\frac{9}{4}$

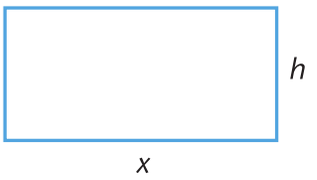
ESIMERKKI 4 Suorakulmion piiri on 24 cm. Merkitään suorakulmion kannan pituutta kirjaimella x.

a) Mikä lauseke kuvaa suorakulmion korkeutta?

b) Millaisia arvoja kannan pituus x voi saada?

RATKAISU

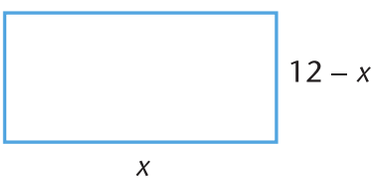
a) Piirretään ensin mallikuva. Merkitään korkeutta kirjaimella h.



Koska suorakulmion piiri on 24 cm, saadaan yhtälö $2x + 2h = 24$.

Ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$\begin{aligned} 2x + 2h &= 24 \\ 2h &= 24 - 2x \quad \big| : 2 \\ h &= 12 - x \end{aligned}$$



b) Sivujen pituudet ovat positiivisia, joten saadaan kaksi ehtoa.

Ehto 1 $x > 0$ ja **Ehto 2** $12 - x > 0$

$$\begin{aligned} -x &> -12 \quad \big| : (-1) \\ x &< 12 \end{aligned}$$

Molempien ehtojen täytyy olla yhtä aikaa voimassa. Ensimmäisen ehdon mukaan x on suurempi kuin nolla. Jälkimmäisen ehdon mukaan x on pienempi kuin 12.

Ehto 1

Ehto 2

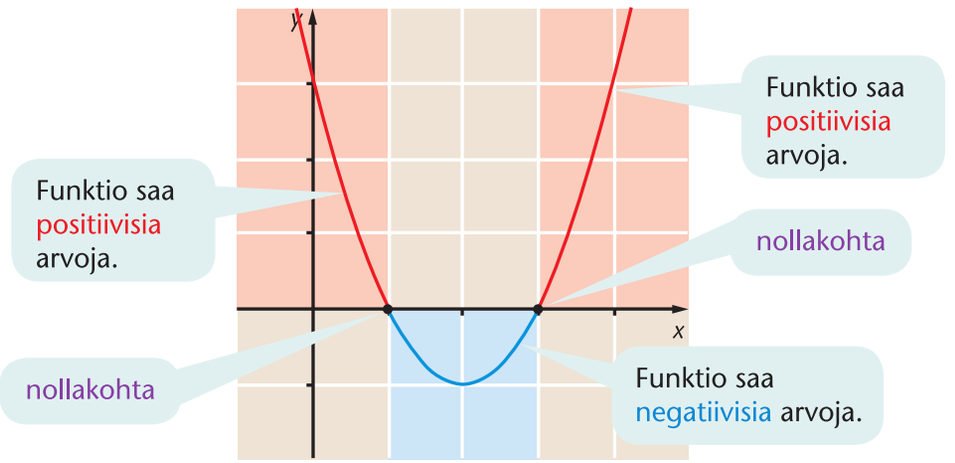
Ratkaisu

Muuttuja x voi saada arvoja lukujen 0 ja 12 väliltä eli $0 < x < 12$.

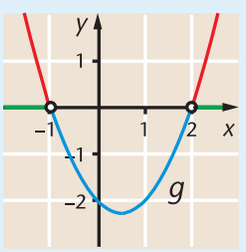
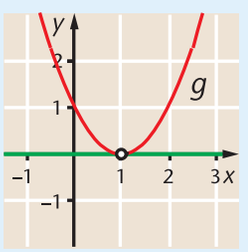
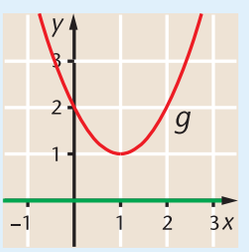
VASTAUS a) Suorakulmion korkeus on $12 - x$. b) $0 < x < 12$

Toisen asteen epäyhtälö

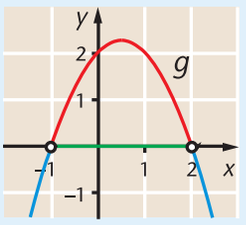
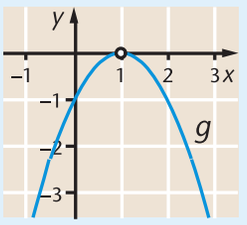
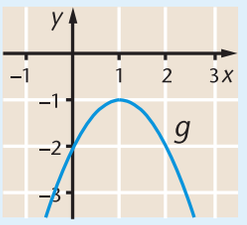
Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on ylös- tai alaspäin aukeava paraabeli. Funktiolla voi olla nolla, yksi tai kaksi nollakohtaa. Se voi saada sekä negatiivisia että positiivisia arvoja. Eräissä tapauksissa funktio saa pelkästään positiivisia arvoja tai pelkästään negatiivisia arvoja.



Paraabelin aukeamisuunta riippuu toisen asteen termin kertoimesta. Jos tämä on positiivinen, niin paraabeli aukeaa ylöspäin. Jos taas toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, niin paraabeli aukeaa alaspäin. Tarkastellaan ensin ylöspäin aukeavia paraabeleja.

	Kaksi nollakohtaa $x = -1$ ja $x = 2$	**Yksi nollakohta $x = 1$**	**Ei nollakohtia**
			
$g(x) > 0$	$x < -1$ tai $x > 2$ eli $x \in \,]-\infty, -1[$ tai $x \in \,]2, \infty[$	$x \neq 1$	kaikilla $x \in \mathbf{R}$
$g(x) < 0$	$-1 < x < 2$ eli $x \in \,]-1, 2[$	ei millään x:n arvolla	ei millään x:n arvolla

Myös alaspäin aukeavien paraabelien kohdalla voidaan erottaa kolme erilaista tapausta.

	Kaksi nollakohtaa $x = -1$ ja $x = 2$	**Yksi nollakohta $x = 1$**	**Ei nollakohtia**
			
$g(x) > 0$	$-1 < x < 2$ eli $x \in \,]-1, 2[$	ei millään x:n arvolla	ei millään x:n arvolla
$g(x) < 0$	$x < -1$ tai $x > 2$ eli $x \in \,]-\infty, -1[$ tai $x \in \,]2, \infty[$	$x \neq 1$	kaikilla $x \in R$

Toisen asteen epäyhtälössä vertaillaan kahden korkeintaan toisen asteen polynomin suuruutta.

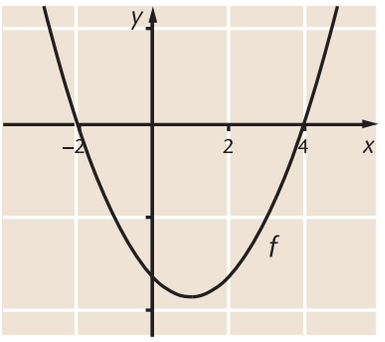
Toisen asteen epäyhtälöitä ovat esimerkiksi $x^2 + 2x - 3 > 0$ ja $-8x^2 + 7x \leq 0$.

Ratkaisussa voidaan edetä seuraavan ohjeen mukaan:

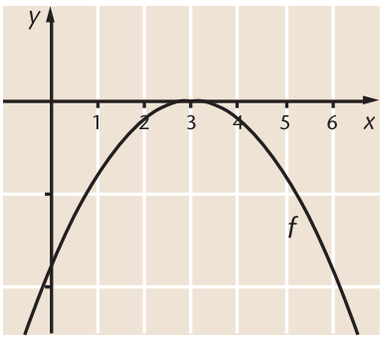
1. Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa epäyhtälön oikealla puolella on ainoastaan luku nolla.
2. Lasketaan epäyhtälön vasemmalla puolella olevan polynomifunktion nollakohdat.
3. Hahmotellaan funktion kuvaaja. Hahmotteluun riittää tieto nollakohtien määrästä ja aukeamisuunta. Tarkempia arvoja kuvaajan piirtämiseksi ei tarvitse laskea.
4. Päätellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan ja nollakohtien avulla.

ESIMERKKI 5 Ratkaise funktion f kuvaajan avulla epäyhtälö $f(x) \leq 0$.

a)

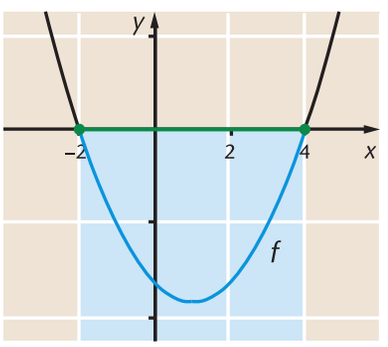


b)



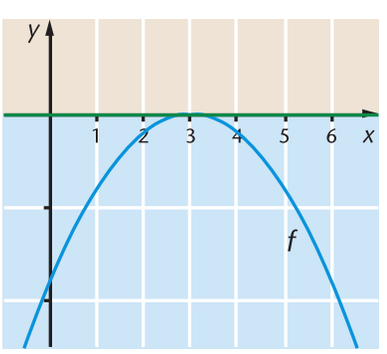
RATKAISU

a) Funktiolla f on kaksi nollakohtaa, $x = -2$ ja $x = 4$. Kun muuttuja x saa arvoja nollakohtien väliltä, funktio saa negatiivisia arvoja.



Epäyhtälön $f(x) \leq 0$ mukaan f voi saada myös arvon nolla. Ratkaisuna on siis lukujen -2 ja 4 muodostama suljettu väli $[-2, 4]$ eli $-2 \leq x \leq 4$.

b) Funktiolla on vain yksi nollakohta, $x = 3$. Koska kuvaaja on kaikilla muilla muuttujan x arvoilla x-akselin alapuolella, niin f saa vain negatiivisia arvoja tai arvon nolla.



Epäyhtälö $f(x) \leq 0$ toteutuu siis kaikilla muuttujan x arvoilla eli $x \in \mathbf{R}$.

VASTAUS a) $-2 \leq x \leq 4$ b) $x \in \mathbf{R}$

ESIMERKKI 6 Ratkaise epäyhtälö.

a) $2x^2 \geq 50$ b) $x^2 + 6x + 9 > 0$

RATKAISU

a) Epäyhtälö $2x^2 \geq 50$ muokataan ensin siirtämällä termi 50 vasemmalle puolelle eli muotoon eli $2x^2 - 50 \geq 0$.

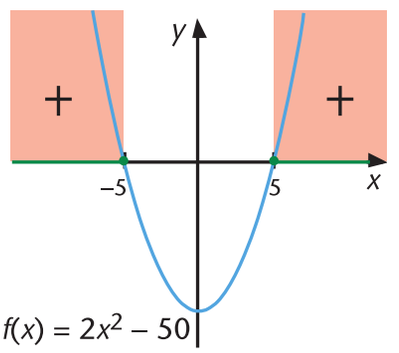
Ratkaistaan sitten funktion $f(x) = 2x^2 - 50$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 50 &= 0 \\ 2x^2 &= 50 \quad | : 2 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisussa voi käyttää myös ratkaisukaavaa.

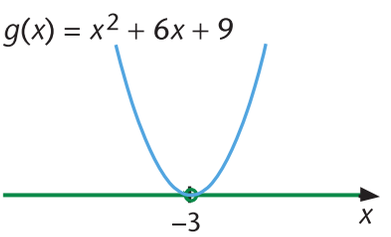
Funktiolla on siis kaksi nollakohtaa eli se leikkaa x-akselin kahdessa kohdassa, $x = 5$ ja $x = -5$. Lisäksi kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan näiden tietojen avulla kuvaaja.

Funktio f saa positiivisia arvoja tai arvon nolla, kun kuvaaja on x-akselilla tai sen yläpuolella eli kun $x \leq -5$ tai $x \geq 5$.



b) Ratkaistaan funktion $g(x) = x^2 + 6x + 9$ nollakohdat ja hahmotellaan sen kuvaaja.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} \\ x &= \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$



Funktiolla g on vain yksi nollakohta $x = -3$ ja muualla se saa positiivisia arvoja. Näin ollen $x^2 + 6x + 9 > 0$, kun $x \neq -3$.

VASTAUS a) $x \leq -5$ tai $x \geq 5$ b) $x \neq -3$

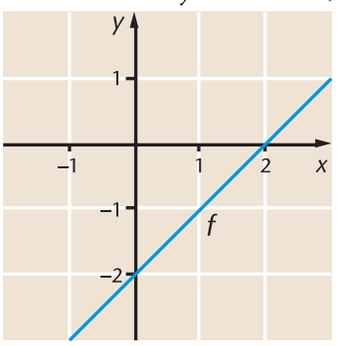
Tehtäviä

Ensimmäisen asteen epäyhtälö

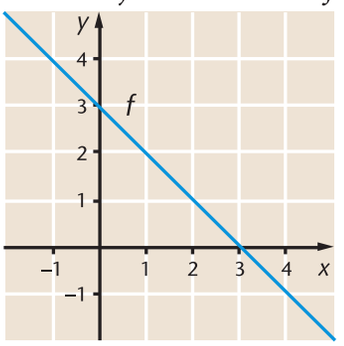
E1

22. Päättele kuvaajan avulla, millä muuttujan x arvoilla $f(x) \geq 0$.

a)

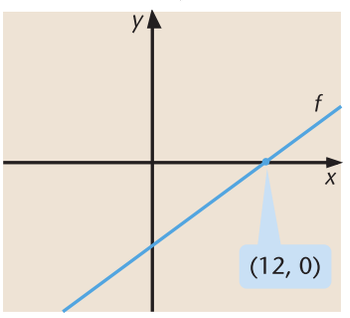


b)

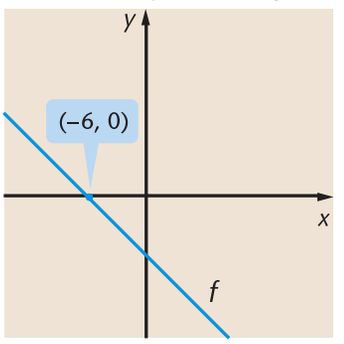


23. Päättele kuvaajan avulla, milloin funktio f saa negatiivisia arvoja.

a)



b)



24. Piirrä esimerkki ensimmäisen asteen polynomifunktion g kuvaajasta, kun tiedetään, että
a) $g(x) > 0$, kun $x < -1$
b) $g(x) \leq 0$, kun $x \leq 1$.

E2

25. Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = 2x - 6$ saa negatiivisia arvoja? Ratkaise tehtävä sekä kuvaajaa käyttäen että ilman kuvaajaa kuten esimerkissä 2.

26. Millä muuttujan x arvoilla funktio $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$ saa positiivisia arvoja? Ratkaise tehtävä kuvaajan avulla.

27. Ratkaise epäyhtälö ilman kuvaajaa.
a) $-4x + 6 < -2$ b) $-3x + 1 \leq 5 - 2x$

Ratkaise tehtävien 28–31 epäyhtälöt.

28. a) $3x + 1 \geq 5x + 2$ b) $2(x + 2) \geq 5$

29. a) $-(2x - 4) > 12 + 2x$ b) $-(-4x + 3) - x < -2x - 1$

30. a) $2(3 - x) < 7 - 2x$ b) $5x + 3(x - 1) < 8x - 4$

E3 31. a) $\frac{2x}{5} - 3 < \frac{x}{2}$ b) $\frac{4x+1}{4} \geq 7x - \frac{1}{2}$

32. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x}{3} - \frac{x-3}{2} < x + \frac{x+6}{3}$. [S1989, 1]

33. Ratkaise epäyhtälö $(x-2)^2 - (x^2-4) > 2$. [K1989, 3]

E4 34. Suorakulmaisen kolmion kahden kateetin yhteispituus on 30 cm. Jos toisen kateetin pituus on x, niin
a) millä lausekkeella merkitään toisen kateetin pituutta
b) mitä arvoja x voi saada?

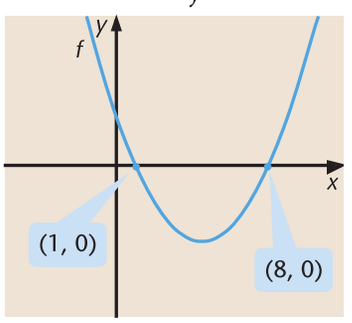
35. Suorakulmion piiri on 22 cm. Jos kannan pituus on x, niin
a) mikä on suorakulmion korkeus
b) mitä arvoja x voi saada?

36. Neliöjuuren määritelmän mukaan lauseke $\sqrt{a}$ on määritelty vain, jos $a \geq 0$. Millä x:n arvoilla seuraavat lausekkeet on määritelty?
a) $\sqrt{1-5x}$ b) $\sqrt{\frac{-3x+10}{2}}$

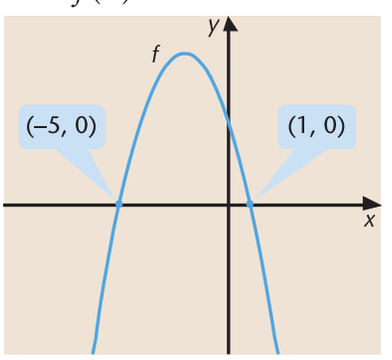
Toisen asteen epäyhtälö

E5 37. Ratkaise kuvaajan avulla epäyhtälö $f(x) \geq 0$.

a)

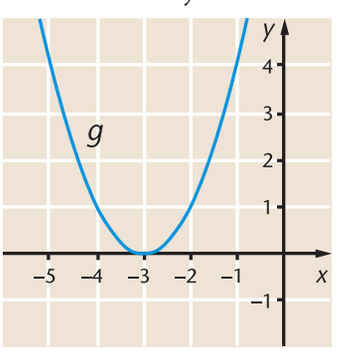


b)

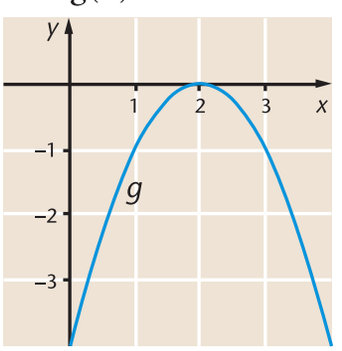


38. Ratkaise kuvaajan avulla epäyhtälö $g(x) \leq 0$.

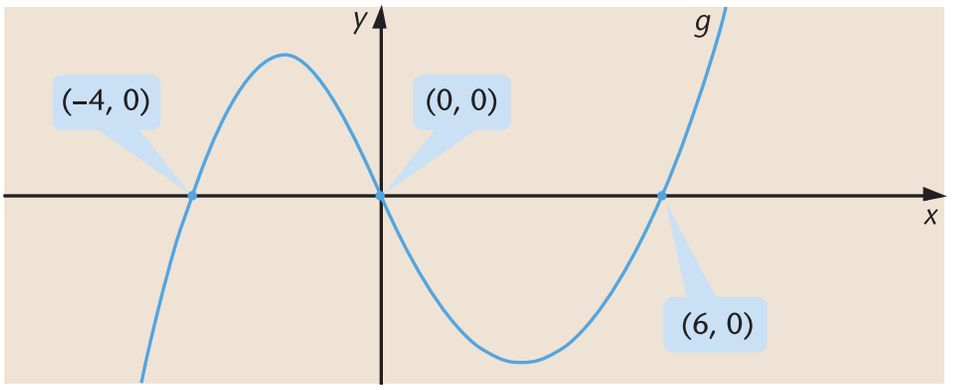
a)



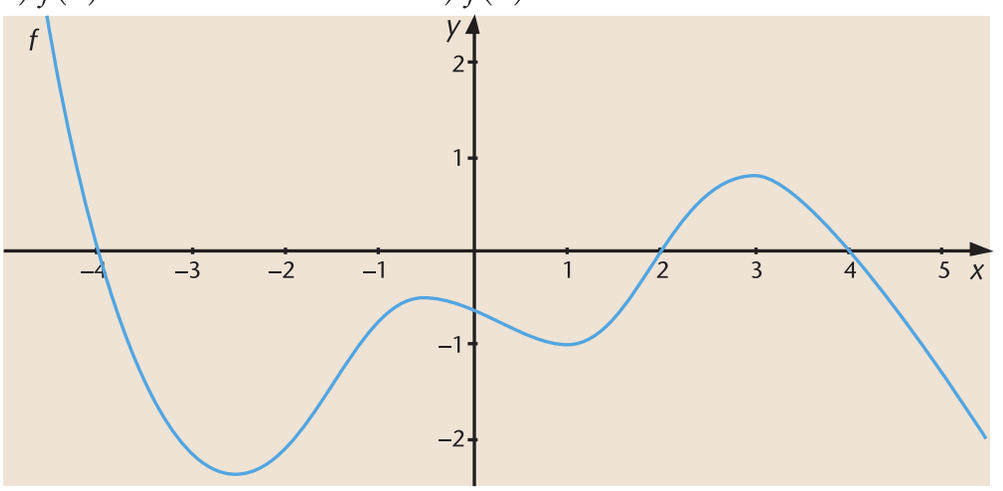
b)



39. Päättele kuvaajan avulla, millä muuttujan x arvoilla $g(x) < 0$.



40. Päättele kuvan avulla, milloin
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) < 0$.



Ratkaise tehtävien 41–45 epäyhtälöt.

41. a) $x^2 - 3x - 4 > 0$ b) $-x^2 + 5{,}4x - 2 \geq 0$

E6 42. a) $4x^2 \leq 16$ b) $100 < 2x^2 - 10x$

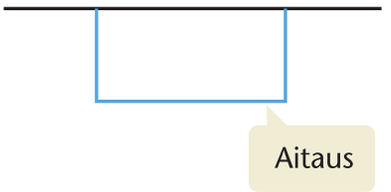
43. a) $x^2 + 4x + 6 > 0$ b) $-2x^2 + 12x - 18 > 0$

44. a) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ b) $-2x^2 + 20x - 50 < 0$

45. a) $-6x^2 + x - 9 \leq 0$ b) $8x^2 + 2x + 9 \leq 0$

46. Määritä ne positiiviset muuttujan x arvot, jotka toteuttavat epäyhtälön $2x^2 + 3x - 20 \leq 0$. [S1992, 3b]

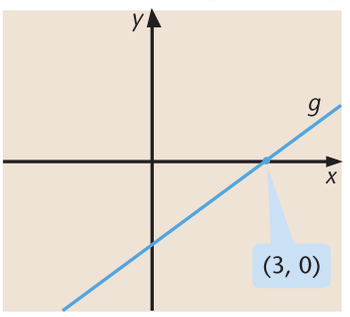
47. Talon seinän viereen on rakennettu koiralle aitaus kuvan mukaisella tavalla. Verkkoaitaa on käytettävissä 30 m. Kuinka seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus on valittava, jotta aitauksen ala olisi vähintään 100 m^2?



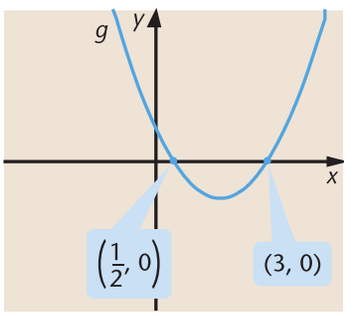
Sekalaisia tehtäviä

48. Milloin funktio g saa negatiivisia arvoja?

a)



b)



49. Millä muuttujan x arvoilla funktio g saa negatiivisia arvoja?
a) $g(x) = 2x + 1$ b) $g(x) = -2x^2 + 10x$

50. Ratkaise epäyhtälö.
a) $4x + 5 < 5x - 1$ b) $2(x - 5) < -4(x + 1) - x + 1$

51. Ratkaise epäyhtälö.
a) $8x^2 \geq 72$ b) $x^2 + 8x + 21 < 0$

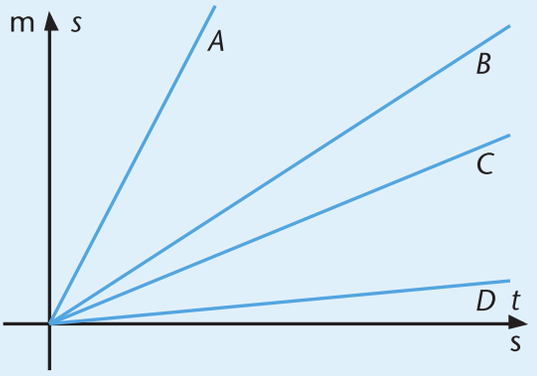
52. Pahvinpalasta, jonka mitat ovat 20 cm × 15 cm, taitellaan kanneton laatikko. Pahvin kaikista nurkista leikataan pois yhtä suuret neliöt. Merkitään pois leikatun neliön sivun pituutta kirjaimella x.
a) Mitä arvoja x voi saada?
b) Muodosta ja sievennä lauseke laatikon pohjan pinta-alalle.
c) Kuinka pitkä on pois leikattavan neliön sivun oltava, jotta pohjan ala olisi korkeintaan 150 cm^2?

1.3 Funktion muutosnopeus

POHDINTA 1

Oskari tarkkaili ikkunasta ulkona liikkuvia ihmisiä ja kuvasi henkilöiden liikettä koordinaatistossa. Mikä kuvaajista kuvaa

a) sauvakävelyllä olevaa mummoa
b) hälytysvilkut päällä kulkevaa ambulanssia
c) skootterilla ajavaa tyttöä
d) pyörällä kouluun kiirehtivää poikaa?



POHDINTA 2

Mikä suorista

a) nousee jyrkimmin

b) laskee jyrkimmin?

A $y = \frac{1}{4}x + 1$

B $y = \frac{1}{2}x - 3$

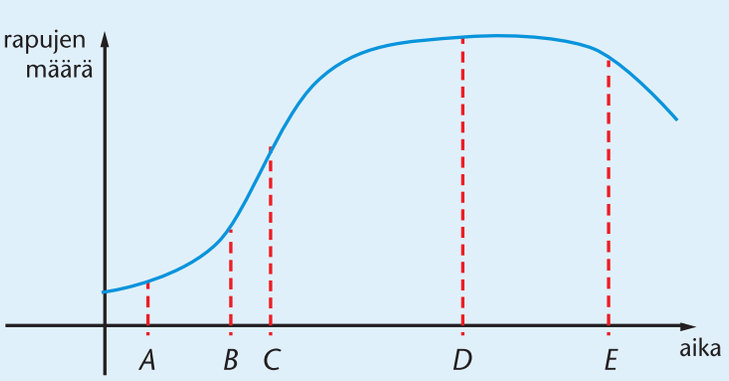
C $y = -\frac{1}{3}x - 4$

D $y = -\frac{1}{8}x + 2$

POHDINTA 3

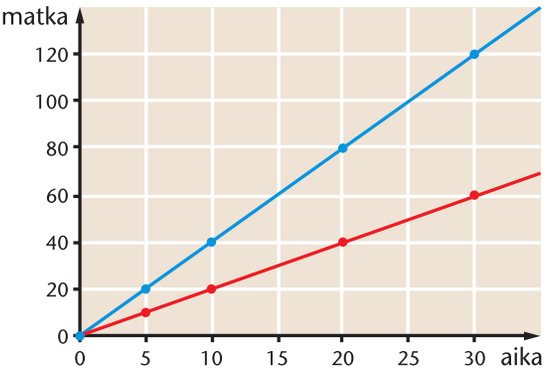
Metsälampeen istutettiin rapuja. Alla olevassa kuvaajassa on kuvattu rapukannan kasvua. Tarkastellaan ajanhetkiä *A*, *B*, *C*, *D* ja *E*.

a) Tarkastele rapukannan kasvua aikaväleillä *A*–*B* ja *C*–*E*. Kummalla aikavälillä rapukanta on kasvanut voimakkaammin?
b) Milloin rapukannan kasvu on voimakkainta?
c) Mitä voit sanoa rapukannan kasvusta ajan hetkellä *C*?
d) Mitä voit sanoa rapukannan kasvusta ajan hetkellä *D*?



Liike on tuttu ilmiö jokapäiväisessä elämässä. Tasaisen liikkeen kuvaaja *ts*-koordinaatistossa on suora. Mitä jyrkempi liikettä kuvaava suora on, sitä nopeammasta liikkeestä on kysymys.

Aika t (s)	Matka s_1 (m)	Matka s_2 (m)
0	0	0
5	10	20
10	20	40
20	40	80
30	60	120



Tasaisessa liikkeessä suoran kulmakerroin kuvaa liikkeen **nopeutta**.

Aika t (s)	Matka s_1 (m)
0	0
5	10

Suoran kulmakerroin $k_1 = \frac{10-0}{5-0} = 2$

Nopeus $v_1 = 2$ m/s

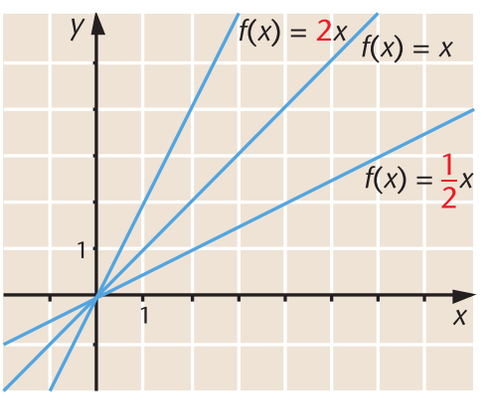
Aika t (s)	Matka s_2 (m)
0	0
5	20

Suoran kulmakerroin $k_2 = \frac{20-0}{5-0} = 4$

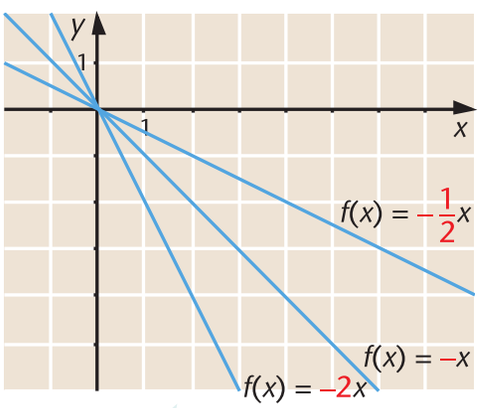
Nopeus $v_2 = 4$ m/s

Samaa nopeuden käsitettä voidaan käyttää hyväksi matematiikassa, kun tarkastellaan funktion muutosnopeutta.

Suuntakulma s. 146



Mitä suurempi nousevan suoran kulmakerroin on, sitä jyrkemmin suora nousee eli sitä **nopeammin funktion arvot kasvavat**.



Mitä pienempi laskevan suoran kulmakerroin on, sitä jyrkemmin suora laskee eli sitä **nopeammin funktion arvot vähenevät**.

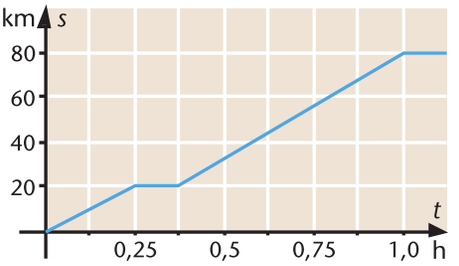
ESIMERKKI 1

Kuvaaja esittää Villen automatkaa kotoa työpaikalle. Ville lähtee aamulla kello 9.00 ja ottaa matkan varrella asuvan Pekan kyytiinsä. Vastaa seuraaviin kysymyksiin kuvaajan perusteella.

a) Kuinka suuri on auton keskinopeus ensimmäisen 15 minuutin aikana?

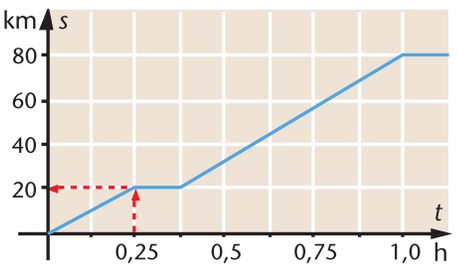
b) Kauanko Ville viipyy Pekan luona?

c) Mikä on auton keskinopeus Pekan luota lähdettäessä?



RATKAISU

a) Muutetaan minuutit ensin tunneiksi: $15 \text{ min} = \frac{15}{60} \text{ h} = 0{,}25 \text{ h}$.

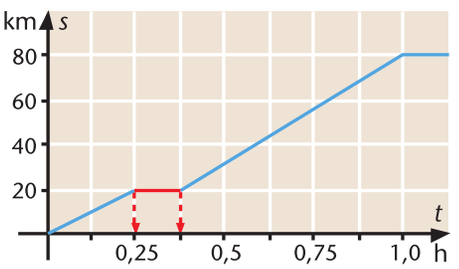


Kuvaajan mukaan 0,25 tunnin aikana on edetty 20 km, joten keskinopeus v on

$$v = \frac{s}{t} = \frac{20 \text{ km}}{0{,}25 \text{ h}} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

nopeus = $\frac{\text{matka}}{\text{aika}}$

b) Kuvaaja on vaakasuora, kun matkaa ei kerry ja nopeus on $v = 0$. Tällöin ollaan Pekan luona.

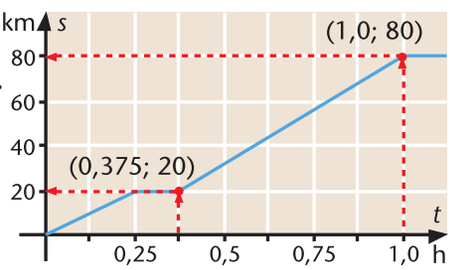


Pekan luo saavutaan siis, kun lähdöstä on kulunut 0,25 h, ja Pekan kotoa lähdetään, kun lähdöstä on kulunut noin 0,375 h.

Pekan luona viivytään siis

$$0{,}375 \text{ h} - 0{,}25 \text{ h} = 0{,}125 \text{ h} = 0{,}125 \cdot 60 \text{ min} = 7{,}5 \text{ min}$$

c) Lasketaan loppumatkaa kuvaavan suoran kulmakerroin. Kuvaaja kulkee pisteiden (0,375; 20) ja (1,0; 80) kautta.



Loppumatkaa kuvaavan suoran kulmakerroin on

$$\frac{80 - 20}{1{,}0 - 0{,}375} = 96 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$$

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Loppumatka kuljetaan siis nopeudella $96 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

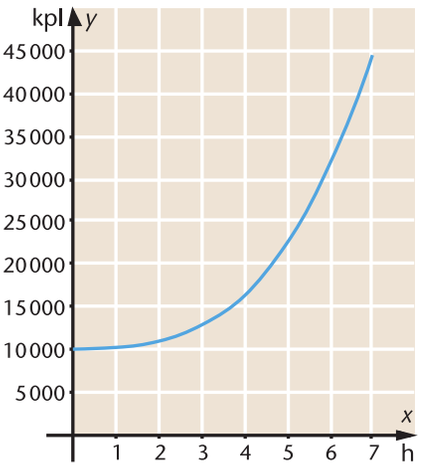
VASTAUS

a) $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) 7,5 min c) $96 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

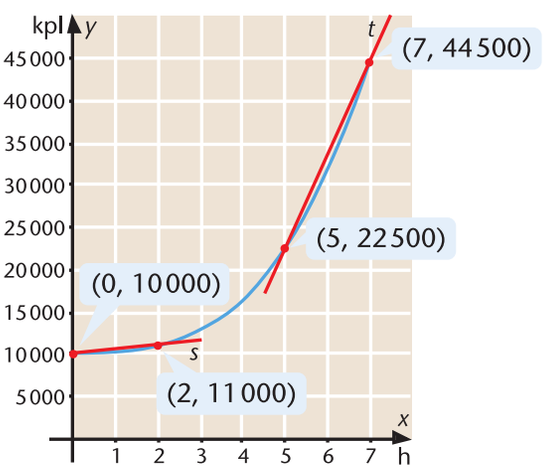
Suurin osa funktioiden kuvaajista on muita kuin suoria. Näiden funktioiden muutosnopeuden määrittämisessä voidaan käyttää suoraa apuna.

Kuvaajassa näkyy erään bakteeripopulaation kasvu seitsemän tunnin aikana.

Kuvaajan avulla voidaan sanoa, että populaatio kasvaa aluksi hitaasti. Lopussa kasvu on huomattavasti alkua nopeampaa.



Tutkitaan tilannetta tarkemmin kahden ensimmäisen ja kahden viimeisen tunnin aikana. Arvioidaan kasvunopeutta suoran avulla ja piirretään kuvaan suorat *s* ja *t*. Näiden suorien kulmakertoimet kertovat **keskimääräisen muutosnopeuden** tarkasteltavilla väleillä.



Aikaväli 0–2 h

Suora *s* leikkaa kuvaajan 0 ja 2 tunnin kohdalla. Pisteet (0, 10 000) ja (2, 11 000) ovat suoralla *s*.

Keskimääräinen muutosnopeus:

$$\frac{11000-10000}{2-0}$$

$= 500$ (bakteeria tunnissa)

Aikaväli 5–7 h

Suora *s* leikkaa kuvaajan 5 ja 7 tunnin kohdalla. Pisteet (5, 22 500) ja (7, 44 500) ovat suoralla *t*.

Keskimääräinen muutosnopeus:

$$\frac{44500-22500}{7-5}$$

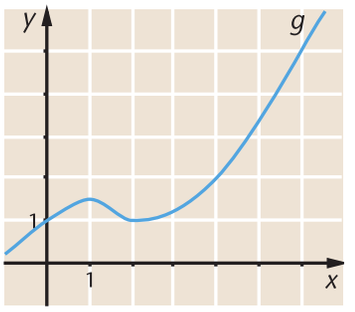
$= 11\,000$ (bakteeria tunnissa)

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ESIMERKKI 2

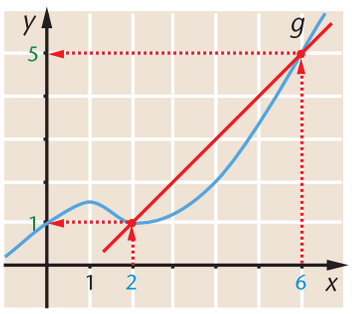
Lukusuoran välit s. 142

Arvioi kuvaajan perusteella funktion g keskimääräistä muutosnopeutta välillä
a) $[2, 6]$ b) $[0, 2]$.



RATKAISU

a) Keskimääräistä muutosnopeutta välillä $[2, 6]$ arvioidaan suoran avulla.



1. **Piirretään suora**, joka leikkaa funktion g kuvaajan pisteissä, joiden x-koordinaatit ovat 2 ja 6.

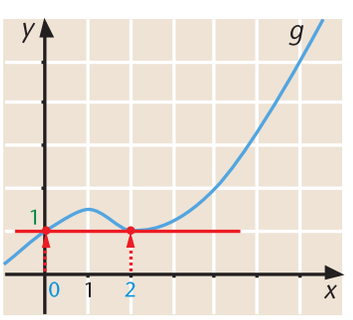
2. Luetaan kuvasta pisteiden y-koordinaatit.
   - Kun $x = 2$, niin $y = 1$.
     Piste: $(2, 1)$.
   - Kun $x = 6$, niin $y = 5$.
     Piste: $(6, 5)$.

3. Lasketaan **suoran kulmakerroin**.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$$

Keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 6]$ on 1.

b) Arvioidaan keskimääräistä muutosnopeutta suoran avulla.



1. **Piirretään suora**, joka leikkaa funktion g kuvaajan pisteissä, joiden x-koordinaatit ovat 0 ja 2.

2. Luetaan kuvasta pisteiden y-koordinaatit, joiden avulla saadaan kaksi suoran pistettä.

Suoran pisteet: $(0, 1)$ ja $(2, 1)$.

3. Lasketaan **suoran kulmakerroin**.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-1}{2-0} = \frac{0}{2} = 0$$

Keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0, 2]$ on 0.

VASTAUS

a) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 6]$ on 1.
b) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0, 2]$ on 0.

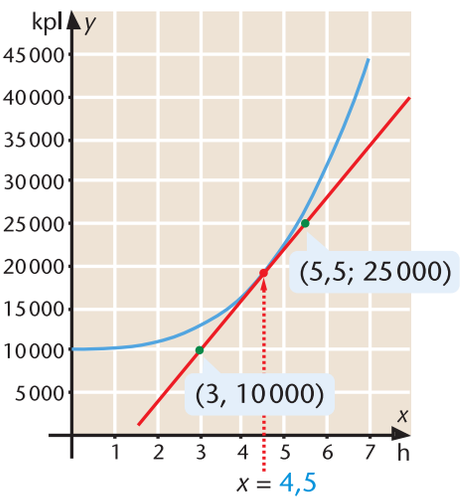
Tangenttisuora esiintyi myös geometrian kurssissa (MAB2), jossa ympyrän tangenttia käsiteltiin geometrian keinoin.

Muutosnopeutta voidaan arvioida suoran avulla myös yhdessä yksittäisessä pisteessä. Tällöin muutosnopeutta kutsutaan **hetkelliseksi muutosnopeudeksi**. Hetkellinen muutosnopeus voidaan määrittää sellaisen suoran avulla, joka sivuaa kuvaajaa tarkasteltavassa kohdassa. Tällaista suoraa kutsutaan **kuvaajan tangentiksi**.

Tarkastellaan bakteeripopulaation kasvua, kun aikaa on kulunut 4,5 tuntia.

1. **Piirretään kuvaajalle tangenttisuora** tarkasteltavaan kohtaan $x = 4{,}5$.

2. Luetaan kuvaajalta **kahden sellaisen pisteen koordinaatit**, jotka on mahdollisimman helppo lukea tarkasti.



3. Lasketaan pisteiden avulla **suoran kulmakerroin**.

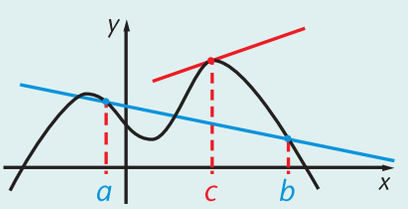
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{25000 - 10000}{5{,}5 - 3} = \frac{15000}{2{,}5} = 6000$$

Hetkellinen muutosnopeus 4,5 tunnin kohdalla on siis 6000 bakteeria tunnissa.

Funktion muutosnopeus

Funktion muutosnopeutta voidaan arvioida suoran kulmakertoimen avulla.

- **Keskimääräinen muutosnopeus** välillä $[a, b]$ saadaan, kun piirretään tarkasteltavan funktion kuvaajalle suora, joka kulkee välin päätepisteiden määräämien kuvaajan pisteiden kautta.



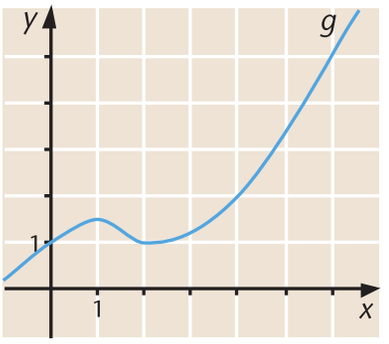
- **Hetkellinen muutosnopeus** kohdassa $x = c$ saadaan, kun piirretään funktion kuvaajalle tarkasteltavaan kohtaan tangenttisuora.

ESIMERKKI 3

Tarkastellaan funktion g kuvaajaa.

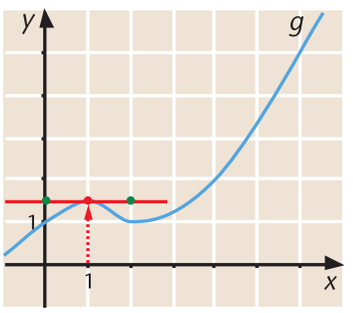
a) Arvioi tangenttisuoran avulla funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$.

b) Missä yksittäisessä kohdassa funktion hetkellinen muutosnopeus on sama kuin funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 6]$?



RATKAISU

a) **1** Piirretään funktion kuvaajalle tangenttisuora kohtaan $x = 1$.



2 Luetaan kuvaajalta kaksi pistettä: $(0; 1{,}5)$ ja $(2; 1{,}5)$

3 Lasketaan tangenttisuoran kulmakerroin:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}5 - 1{,}5}{2 - 0} = \frac{0}{2} = 0$$

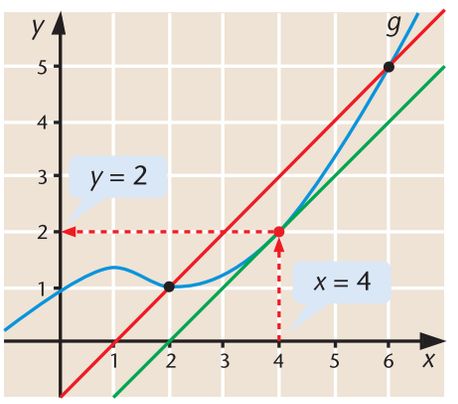
x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on aina 0.

b) Piirretään suora s, joka kuvaa keskimääräistä muutosnopeutta välillä $[2, 6]$.

- Muutosnopeus on sama, jos suoran kulmakerroin on sama.
- Jos suorilla on sama kulmakerroin, ne ovat yhdensuuntaisia.

Etsitään funktion g kuvaajalta suoraa s siirtämällä sellainen kohta, johon voitaisiin piirtää suoran s kanssa yhdensuuntainen tangentti.

Tangenttisuoran t sivuamispisteen koordinaatit ovat $(4, 2)$. Tässä pisteessä funktion hetkellinen muutosnopeus on sama kuin keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 6]$.



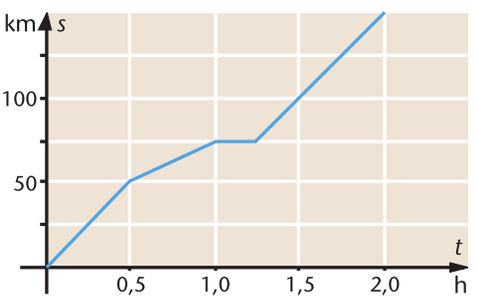
VASTAUS

a) Hetkellinen muutosnopeus on 0. b) Pisteessä $(4, 2)$.

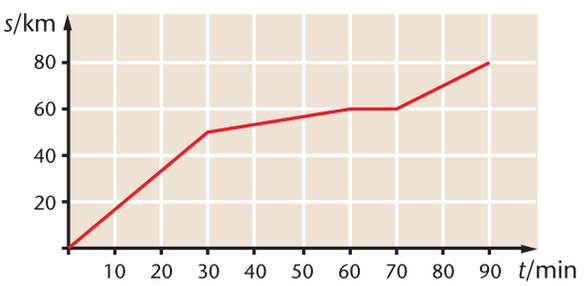
Tehtäviä

E1 53. Kuvaaja esittää Roosan automatkaa kotoa lähimpään kaupunkiin ja takaisin. Roosa käy viemässä veroilmoituksensa verotoimistoon.

a) Kuinka kaukana lähin kaupunki sijaitsee?
b) Kuinka suuri on keskinopeus ensimmäisen puolen tunnin aikana?
c) Kuinka kauan Roosa viipyy verotoimistossa?
d) Kuinka kauan paluumatka kestää?



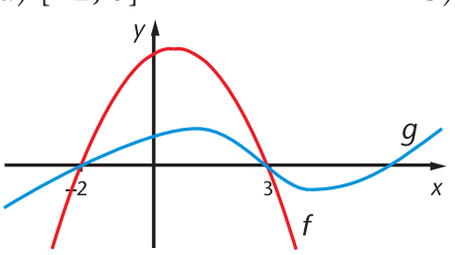
54. Luukas matkusti junalla kaverinsa luo kyläilemään Isomäen kaupunkiin. Alla oleva kuvaaja esittää junan kulkeman matkan (km) riippuvuutta ajasta (min).



a) Laske junan keskinopeus (km/h) ensimmäisen 0,5 tunnin aikana.
b) Juna pysähtyy matkalla Tuppukylän asemalle. Kuinka pitkä matka Tuppukylästä on vielä Isomäelle?
c) Mikä on junan keskinopeus välillä Tuppukylästä Isomäelle?
d) Laske koko matkan keskinopeus.

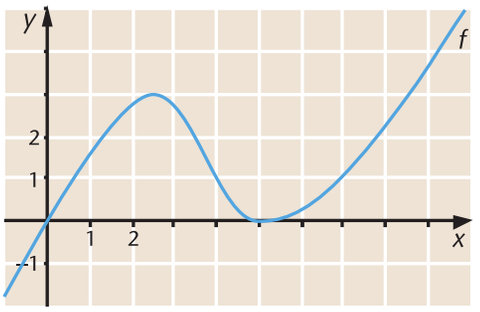
55. Tarkastellaan funktioiden f ja g kuvaajia. Kumman funktion keskimääräinen muutosnopeus on suurempi välillä

a) $[-2, 0]$ b) $[-2, 3]$?

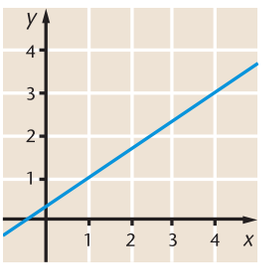


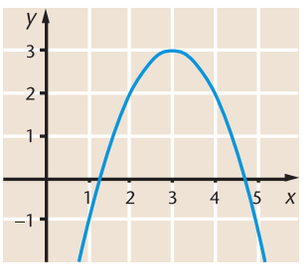
E2 56. Arvioi kuvaajan perusteella funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä

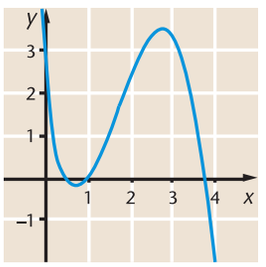
a) $[0, 4]$ b) $[4, 5]$ c) $[0, 5]$.



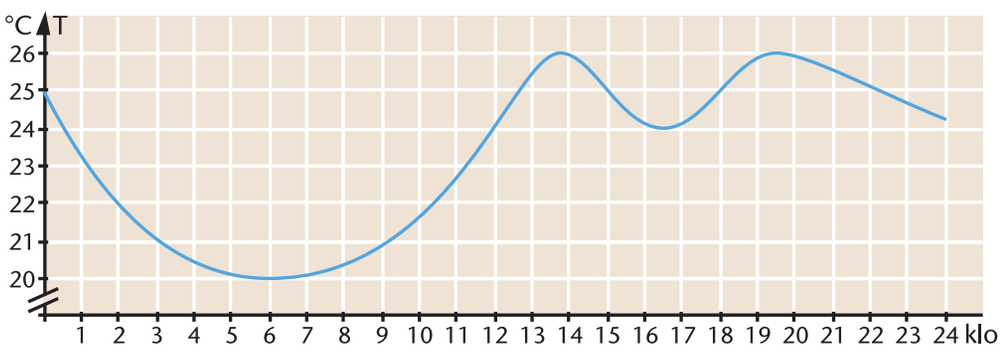
57. Määritä funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1, 4]$.

a)


b)


c)


58. Huoneiston ilmastointi on säädetty siten, että kun huoneiston lämpötila ylittää tietyn rajan, ilmastointilaitteisto alkaa puhaltaa kylmää ilmaa. Kuvaaja esittää huoneiston lämpötilaa yhden vuorokauden aikana heinäkuussa.



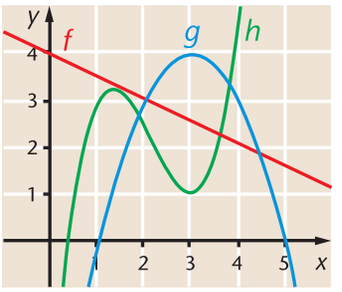
Vastaa kysymyksiin kuvaajan perusteella.

a) Missä lämpötilassa laitteisto alkoi puhaltaa kylmää ilmaa?

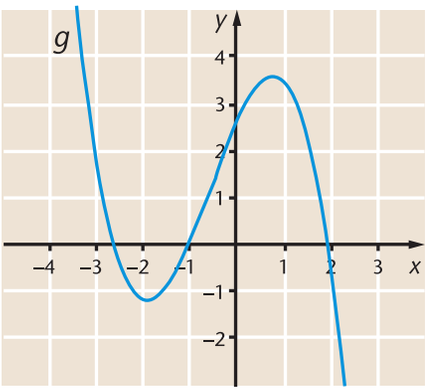
b) Mikä oli lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus klo 16:n ja 18:n välisenä aikana?

c) Mikä oli lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus klo 6:n ja 12:n välisenä aikana?

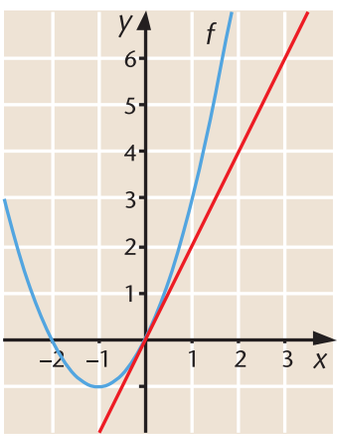
59. Millä seuraavista funktioista f, g ja h on
a) suurin keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1, 3]$
b) pienin keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1, 3]$
c) suurin hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 3$?



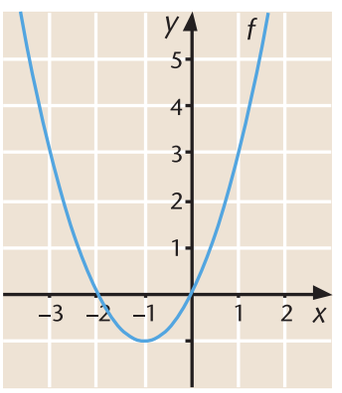
E3 60. a) Arvioi kuvaajan perusteella funktion g hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = -2$.
b) Missä kohdassa funktion g kuvaajaa hetkellinen muutosnopeus on sama kuin muutosnopeus välillä $[-3, -1]$?



61. Arvioi kuvaajan perusteella funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa
a) $x = -1$ b) $x = 0$.

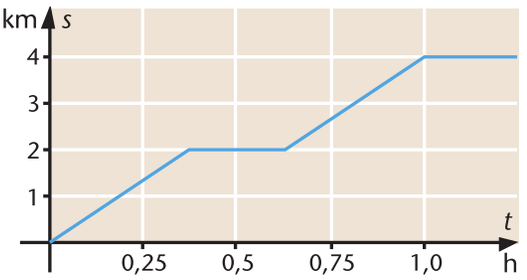


62. Arvioi kuvaajan perusteella, missä kohdassa funktion f muutosnopeus on sama kuin välillä
a) $[-2, 0]$ b) $[-3, 0]$.

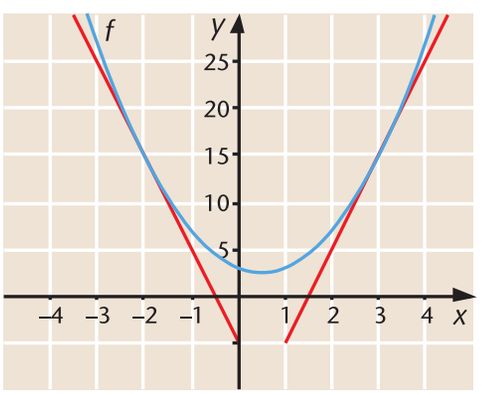


Sekalaisia tehtäviä

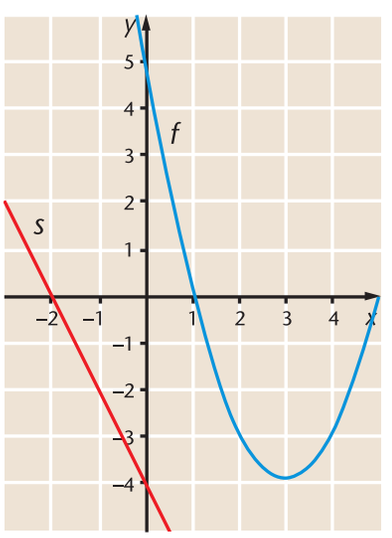
63. Kuvaaja esittää Edlan kävelymatkaa kotoa ystävänsä Millan luokse. Matkalla Edla poikkeaa kauppaan.
a) Kuinka kaukana kauppa on Edlan kotoa?
b) Kuinka kauan Edla viipyy kaupassa?
c) Arvioi Edlan nopeus 15 minuutin kuluttua lähdöstä.
d) Kuinka kaukana Milla asuu?



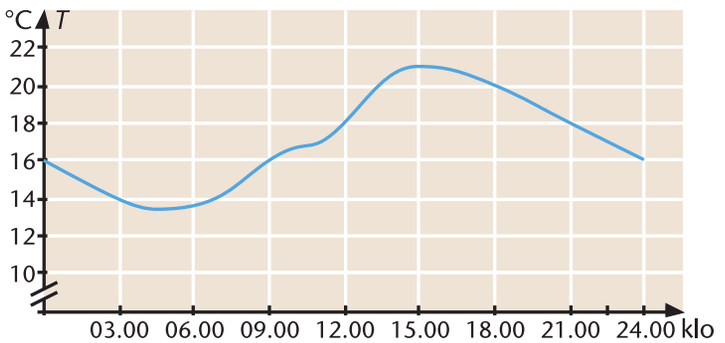
64. Arvioi funktion f kuvaajan avulla funktion
a) keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-2, 3]$
b) keskimääräinen muutosnopeus välillä $\left[-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right]$
c) keskimääräinen muutosnopeus välillä $\left[-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right]$
d) hetkellinen muutosnopeus kohdissa $x = -2$ ja $x = 3$.



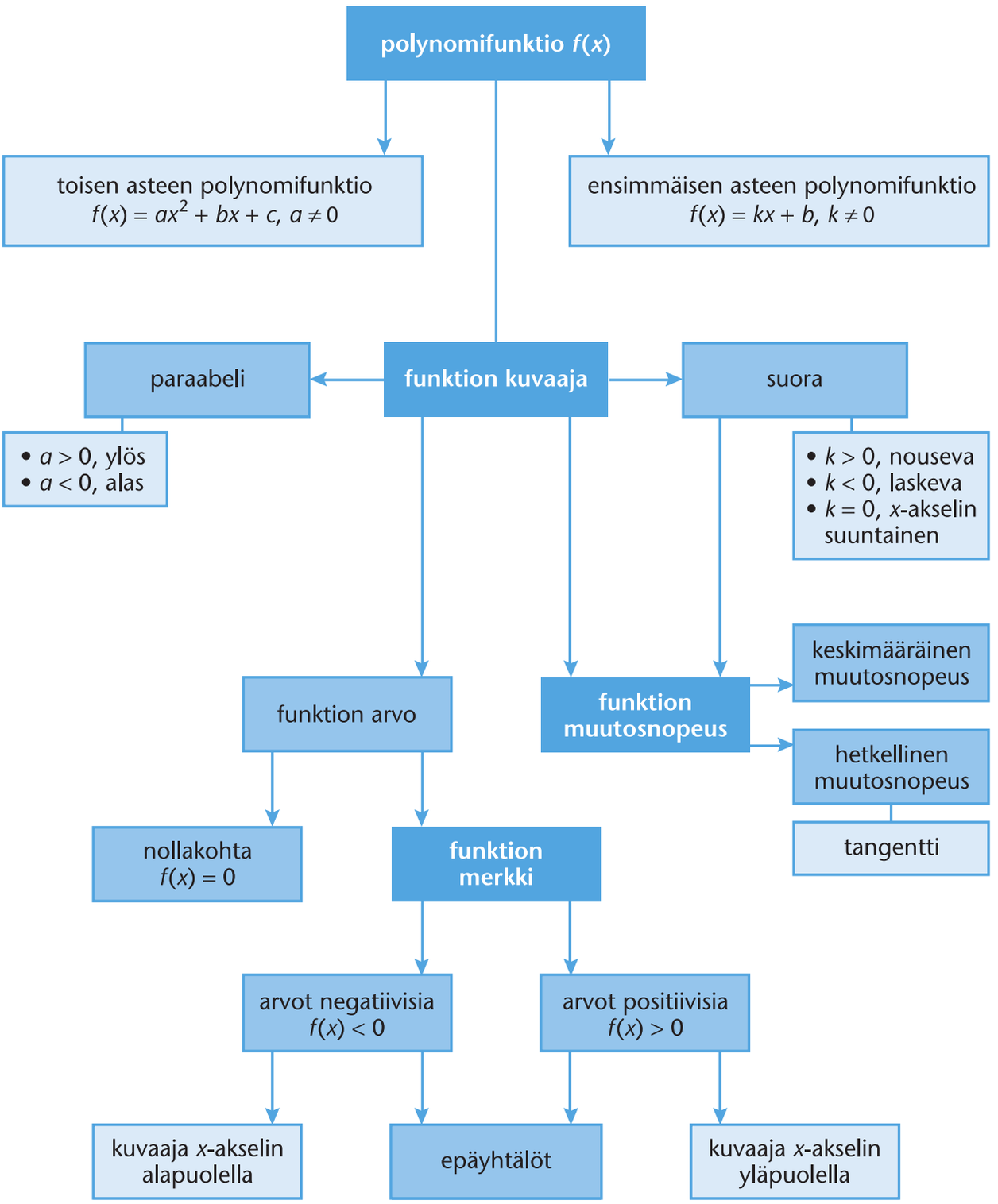
65. a) Laske suoran s kulmakerroin.
b) Missä funktion f pisteessä hetkellinen muutosnopeus on sama kuin suoralla s?
c) Onko funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0, 1]$ suurempi vai pienempi kuin b-kohdan hetkellinen muutosnopeus?



66. Kuvaaja esittää lämpötilan muuttumista eräänä kesäkuun päivänä. Määritä
   a) keskimääräinen lämpötilan muutosnopeus kolmen ensimmäisen tunnin aikana
   b) keskimääräinen lämpötilan muutosnopeus välillä 9.00–18.00
   c) lämpötilan hetkellinen muutosnopeus klo 15.00
   d) lämpötilan hetkellinen muutosnopeus klo 21.00.



Keskeisiä käsitteitä

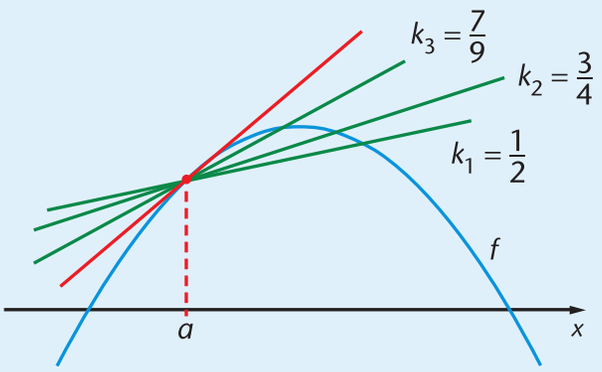


2 Derivaatta

2.1 Funktion derivaatta

POHDINTA 1

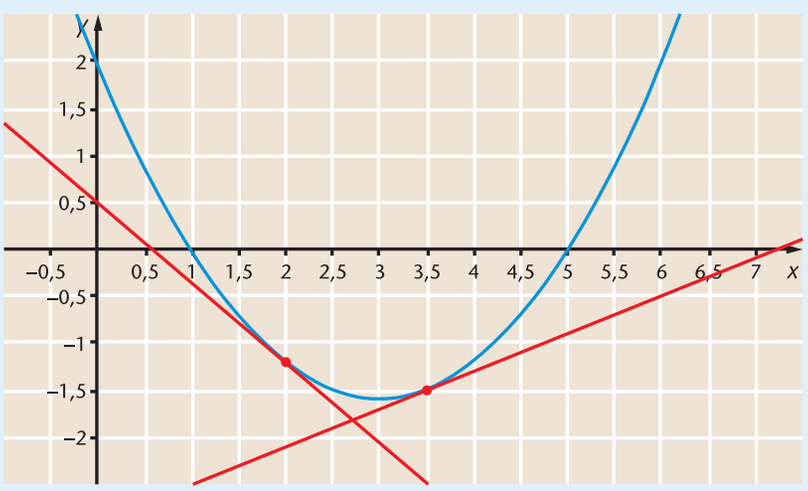
Kuvaan piirretty muutama suora kuvaamaan funktion f keskimääräistä muutosnopeutta. Arvioi suorien kulmakertoimien avulla funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = a$.



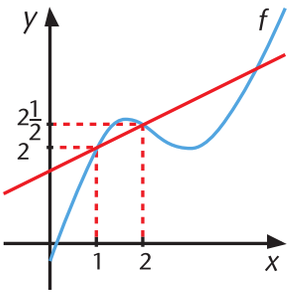
POHDINTA 2

Määritä funktion f kuvaajan avulla

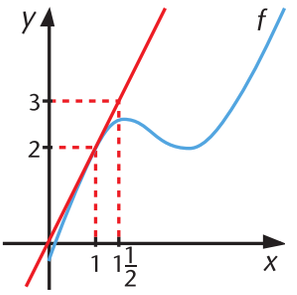
a) funktion nollakohdat
b) $f(0)$
c) $f(3{,}5)$
d) funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa 3,5
e) funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa 2.



Edellisessä luvussa funktion kulkua tarkasteltiin keskimääräisen ja hetkellisen muutosnopeuden avulla.



Funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä [1, 2] on $k = \frac{2\frac{1}{2} - 2}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

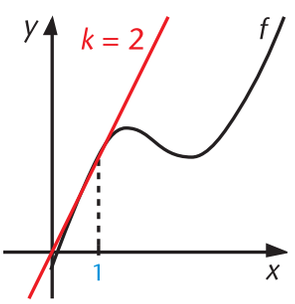


Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on $k = \frac{3 - 2}{1\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Keskimääräinen muutosnopeus ei kuvaa funktion kulkua riittävän tarkasti. Tangenttisuoran avulla laskettu hetkellinen muutosnopeus kuvaa funktion kulkua parhaalla mahdollisella tavalla.

Funktion hetkellinen muutosnopeus on yksi matemaattisen analyysin keskeisimmistä ja tärkeimmistä käsitteistä. Siksi sille on annettu oma nimi, **derivaatta**. Funktion f derivaatalle on myös oma merkintä:

$\boldsymbol{f'(x)}$ (lue: f pilkku x)



Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin on 2.

Funktion derivaatta kohdassa $x = 1$ on 2.

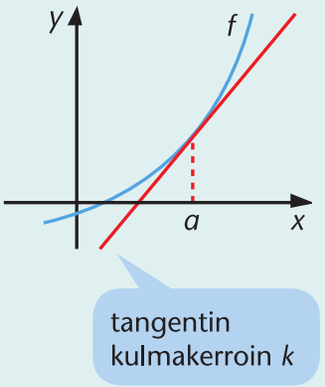
$f'(1) = 2$

Funktion derivaatta voidaan määrittää joko graafisesti tai algebrallisesti. Tässä luvussa määritetään derivaattaa graafisesti eli lasketaan tangenttisuoran kulmakerroin kuvaajan perusteella. Tätä tapaa kutsutaan **graafiseksi derivoinniksi**.

Funktion derivaatta

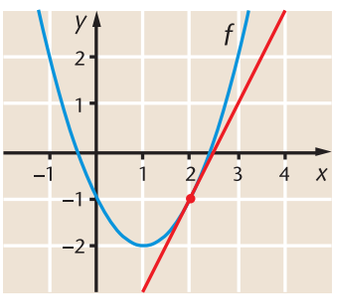
Funktion f derivaatta kohdassa $x = a$ on sama kuin kohtaan $x = a$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin k.

$$f'(a) = k$$



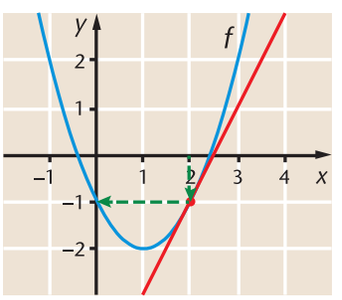
ESIMERKKI 1

Määritä funktion f kuvaajan perusteella
a) $f(2)$
b) $f'(2)$.



RATKAISU

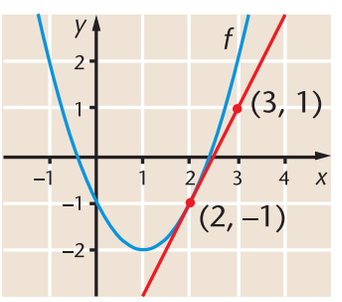
a) Merkintä $f(2)$ tarkoittaa **funktion arvoa** kohdassa $x = 2$. Luetaan kysytty arvo kuvaajasta.



$$f(2) = -1$$

b) Merkintä $f'(2)$ tarkoittaa funktion f derivaatan arvoa kohdassa $x = 2$.

Derivaatan arvo on sama kuin kohtaan $x = 2$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin.



Tangenttisuoran kulmakerroin

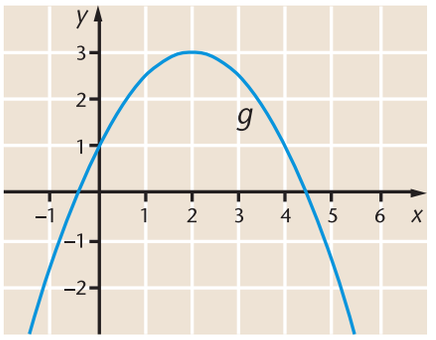
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-1)}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$f'(2) = 2$$

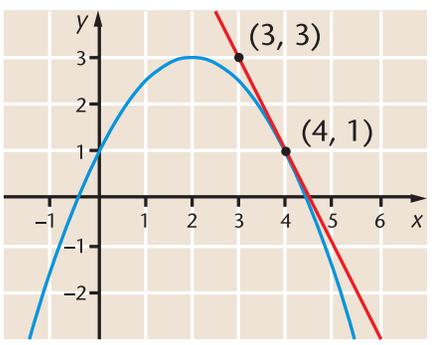
VASTAUS

a) $f(2) = -1$ b) $f'(2) = 2$

ESIMERKKI 2 Määritä kuvaajan avulla funktion $g(x) = -4x^2 - 4x + 1$ derivaatta kohdassa $x = 4$.



RATKAISU Kohdassa $x = 4$ funktio saa arvon 1 eli tangentti on piirrettävä pisteeseen (4, 1). Tangentti sivuaa funktiota pisteessä (4, 1), mutta ei leikkaa sitä muissa pisteissä.



Kulmakertoimen laskemiseen tarvittavat kaksi pistettä kannattaa valita niin, että pisteiden koordinaatit on mahdollisimman helppo arvioida kuvasta.

Tangentin kulmakertoimen laskemiseen tarvitaan kaksi pistettä. Myös piste (3, 3) sijaitsee tangentilla.

Jos $(x_1, y_1) = (3, 3)$ ja $(x_2, y_2) = (4, 1)$ ovat kaksi tunnettua suoran pistettä, kulmakerroin k saadaan kaavalla

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{4-3} = \frac{-2}{1} = -2$$

Funktion g derivaatta kohdassa $x = 4$ on -2 eli $g'(4) = -2$.

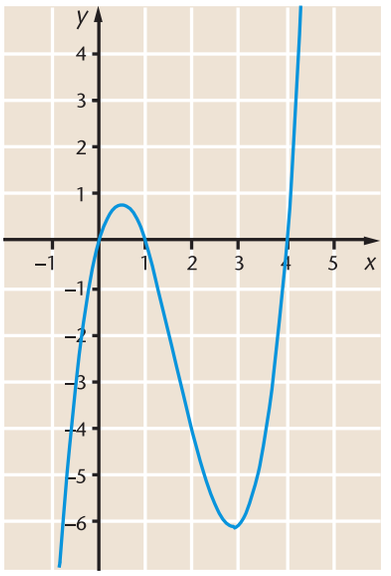
VASTAUS $g'(4) = -2$

Esimerkki 3

Kuvassa on erään polynomifunktion f kuvaaja.

a) Selvitä kuvaajan perusteella $f'(0)$.

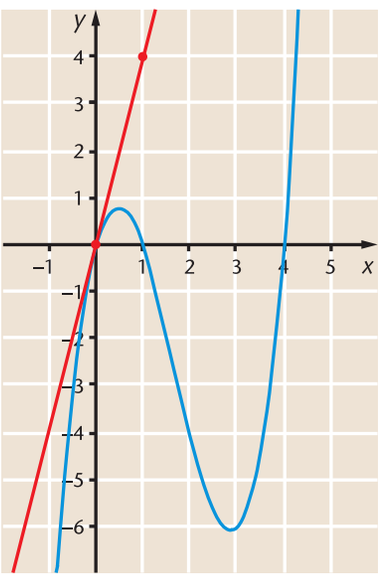
b) Missä muissa kohdissa derivaatalla on sama arvo kuin kohdassa $x = 0$?



Ratkaisu

a) Merkintä $f'(0)$ tarkoittaa derivaatan arvoa kohdassa $x = 0$.

1 **Piirretään** funktion kuvaajalle **tangenttisuora** kohtaan $x = 0$.



2 Valitaan suoralta kaksi pistettä ja **lasketaan** niiden avulla suoran **kulmakerroin**.

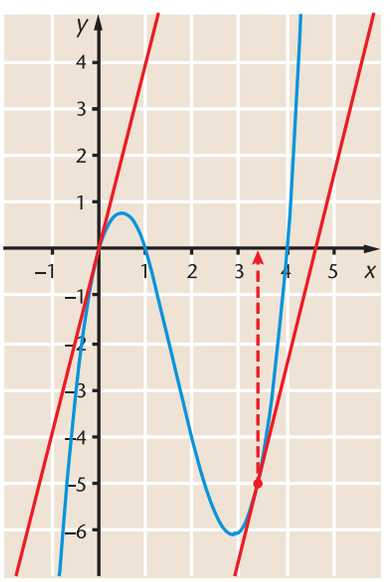
Valitaan pisteet niin, että niiden koordinaatit on helppo lukea kuvasta mahdollisimman tarkasti.

Lasketaan kulmakerroin pisteiden $(0, 0)$ ja $(1, 4)$ avulla.

$$k = \frac{4-0}{1-0} = 4$$

Funktion derivaatta $f'(0) = 4$.

b) Derivaatan arvo on sama niissä kohdissa, joissa tangenttisuoran kulmakerroin on sama.



Etsitään tangenttisuoraa siirtämällä muut sellaiset kohdat funktion kuvaajalta, joihin piirretty tangenttisuora on **yhdensuuntainen** a-kohdan tangenttisuoran kanssa.

Kuvaajalta löydetään suoraa siirtämällä yksi kohta, jossa edellä mainitut ehdot toteutuvat.

Sivuamispisteen x-koordinaatti $x \approx 3{,}5$.

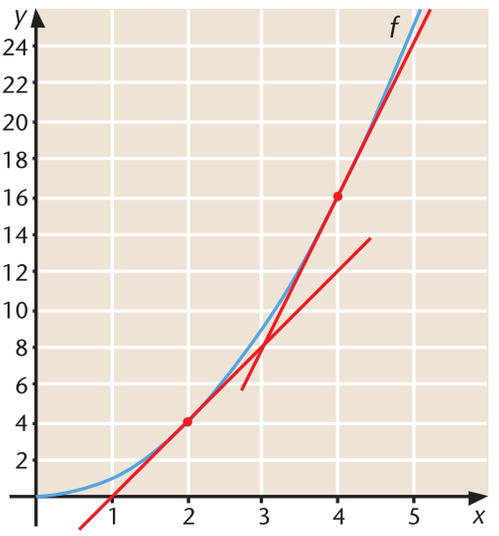
Vastaus

a) $f'(0) = 4$ b) $x \approx 3{,}5$

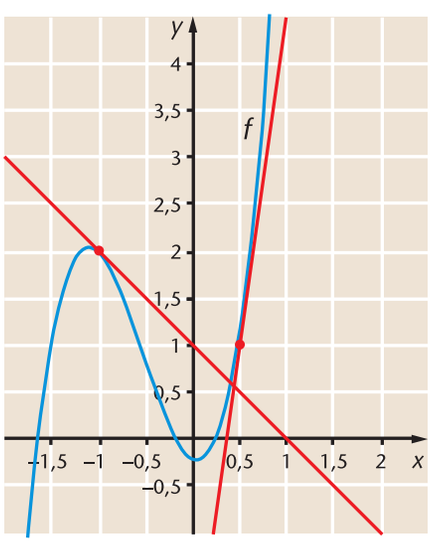
Tehtäviä

Huomaa: koska funktioiden ja derivaattojen arvoja tarkastellaan vain graafisesti, **vastaukset ovat likimääräisiä**.

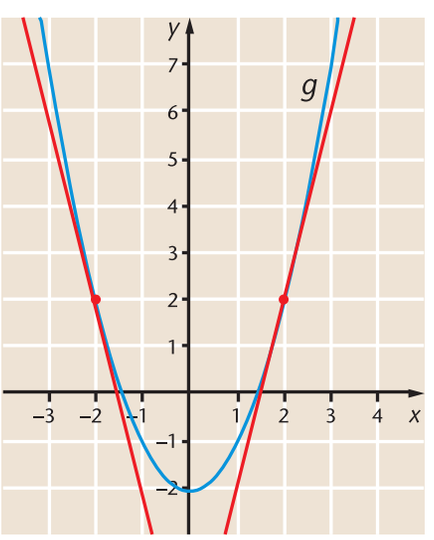
E1 67. Määritä kuvan perusteella
a) $f(4)$
b) $f'(4)$
c) $f(2)$
d) $f'(2)$.



68. Määritä kuvan perusteella
a) $f(-1)$ b) $f(0{,}5)$ c) $f'(-1)$ d) $f'(0{,}5)$.



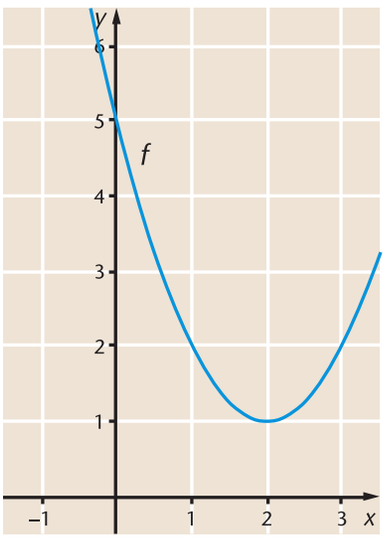
Tehtävä 68



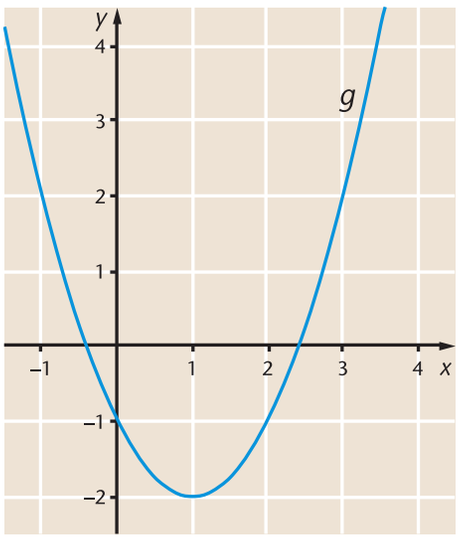
Tehtävä 69

69. Määritä graafisesti funktion g derivaatta kohdassa
a) $x = -2$ b) $x = 2$.

E2 70. Määritä kuvaajan avulla funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5$ derivaatta kohdassa $x = 1$.



Tehtävä 70



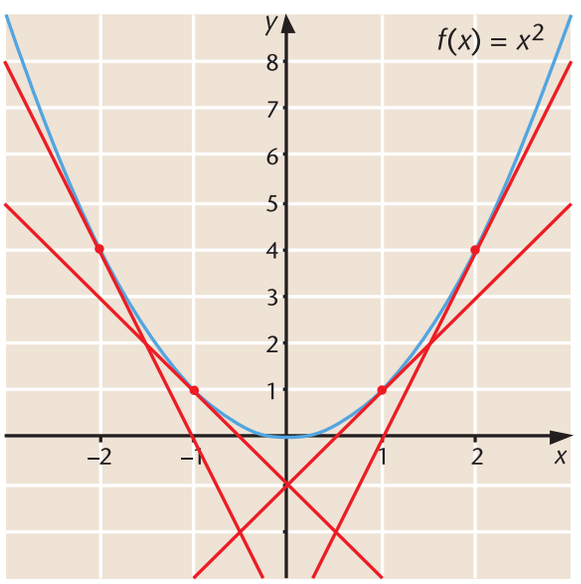
Tehtävä 71

71. Määritä graafisesti funktion $g(x) = x^2 - 2x - 1$ derivaatta kohdassa
a) $x = 1$ b) $x = 2$.

72. Määritä graafisesti $f(2)$ ja $f'(2)$, kun
a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

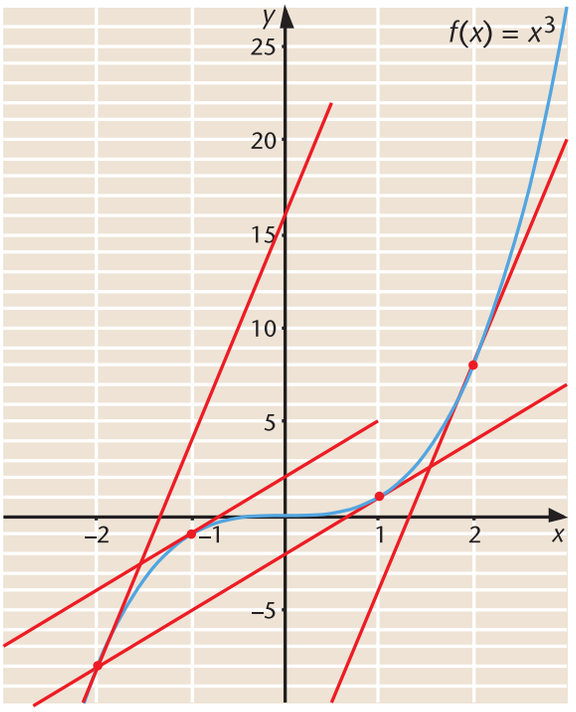
73. Ylöspäin aukeavan paraabelin huippu on pisteessä $(3, -1)$. Määritä $f(3)$ ja $f'(3)$.

74. Täydennä taulukko määrittämällä graafisesti funktion f derivaatat.



x	$f'(x)$
1	
–1	
2	
–2	
x	

75. Täydennä taulukko määrittämällä graafisesti funktion f derivaatat.

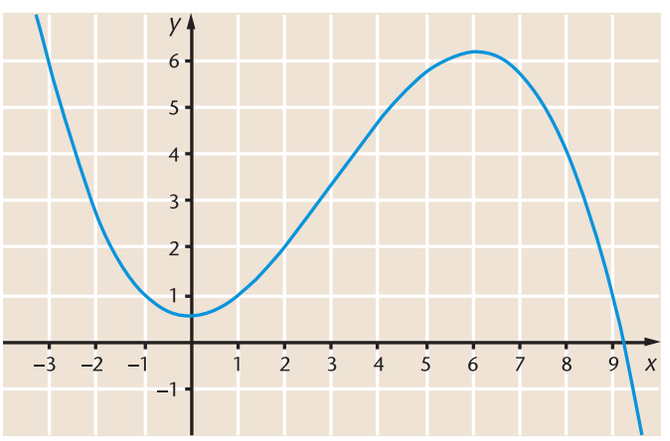


x	$f'(x)$
1	
–1	
2	
–2	
x	

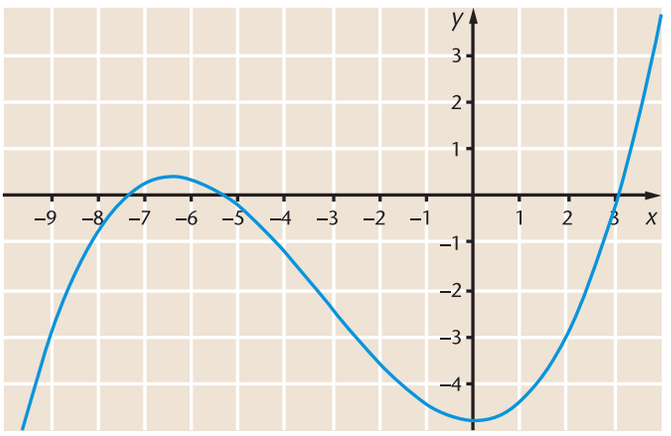
E3 76. Selvitä funktion f kuvaajan perusteella

a) $f'(-1)$

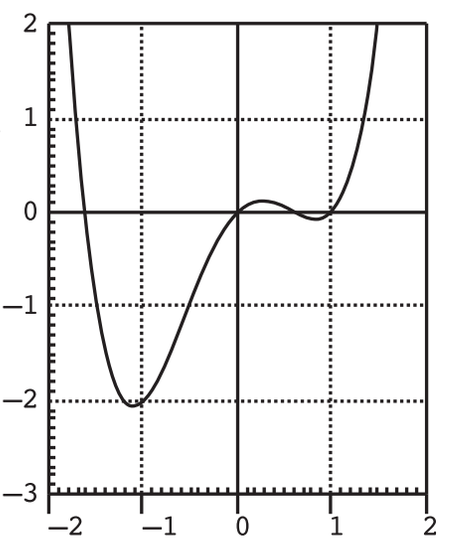
b) missä muissa kohdissa derivaatalla on sama arvo kuin kohdassa $x = -1$.



77. a) Määritä funktion g kuvaajan perusteella $g(2)$ ja $g'(2)$.
b) Missä muissa kohdissa funktio saa saman arvon kuin kohdassa $x = 2$?
c) Missä muissa kohdissa derivaatalla on sama arvo kuin kohdassa $x = 2$?

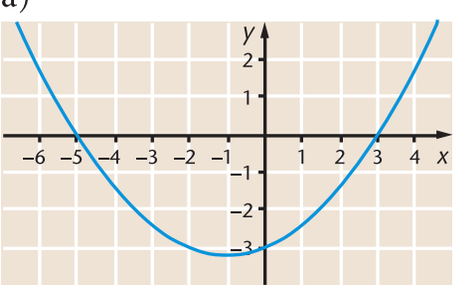


78. Oheisessa kuvassa on erään polynomifunktion f kuvaaja. Selvitä kuvaajan perusteella, kuinka suuri on $f'(0)$. Missä muissa pisteissä derivaatalla on sama arvo kuin origossa? [K1993, 6]

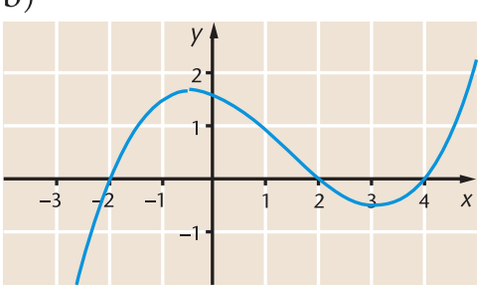


79. Määritä funktion f kuvaajan perusteella, missä kohdissa $f'(x) = 0$ ja missä kohdissa $f(x) = 0$.

a)

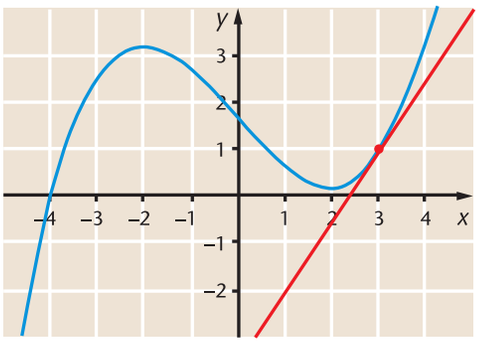


b)



80. Tarkastele funktion f kuvaajaa. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?

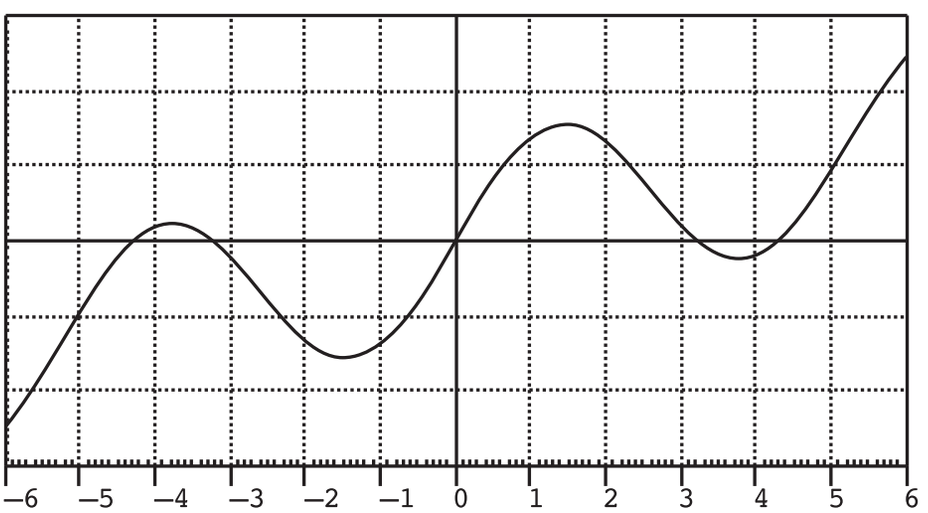
a) $f(1) = 3$ b) $f(3) = 1$ c) $f'(3) = 1{,}5$
d) $f'(1) = 2$ e) $f(4) > 0$ f) $f'(4) > 0$
g) $f(-3) < 0$ h) $f'(-3) < 0$ i) $f'(-2) = 0$



81. Piirrä sellaisen funktion f kuvaaja, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

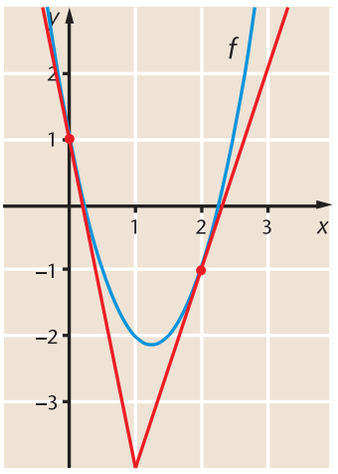
- $f(0) = 2$
- $f(4) = 1$
- $f'(2) = 0$.

82. Oheisena on väliä $-6 \le x \le 6$ vastaava osa erään funktion kuvaajasta $y = f(x)$. Määritä kuvion perusteella funktion nollakohdat; niistä pienin olkoon x_1. Määritä edelleen derivaatan arvo $f'(x_1)$. Vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella. [K1994, 7]

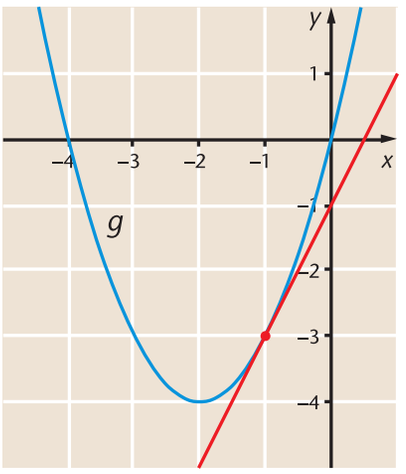


Sekalaisia tehtäviä

83. Määritä kuvan perusteella
a) $f(0)$ b) $f'(0)$ c) $f(2)$ d) $f'(2)$.



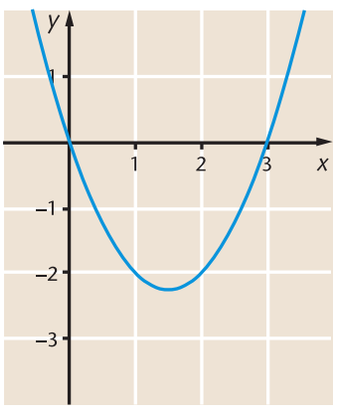
Tehtävä 83



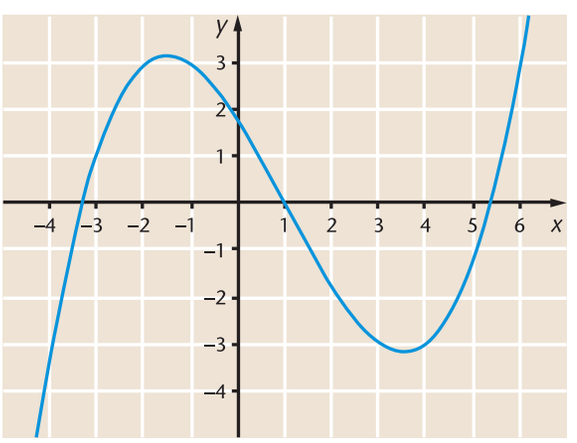
Tehtävä 84

84. Määritä kuvan perusteella
a) $g(-1)$ b) $g'(-1)$
c) missä kohdassa $g(x) = 0$ d) missä kohdassa $g'(x) = 0$.

85. Määritä graafisesti funktion $f(x) = x^2 - 3x$ derivaatta kohdassa $x = 1$.



86. a) Määritä funktion g kuvaajan perusteella $g(5)$ ja $g'(5)$.
b) Missä muissa kohdissa funktio saa saman arvon kuin kohdassa $x = 5$?
c) Missä muissa kohdissa derivaatalla on sama arvo kuin kohdassa $x = 5$?



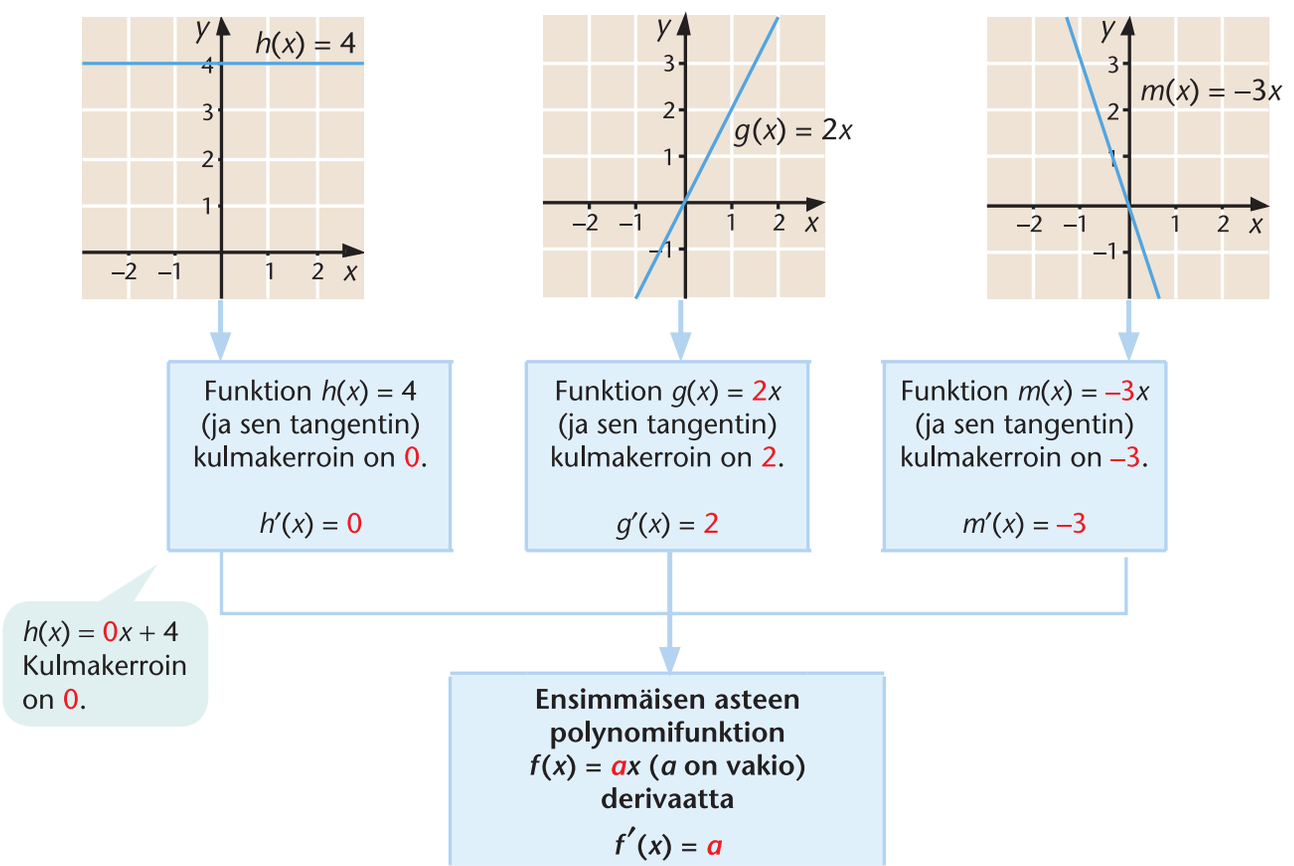
2.2 Derivoimissääntöjä ja -kaavoja

Derivaatan määrittäminen graafisesti on hidasta ja epätarkkaa. Derivaatan määrittämiseksi on olemassa myös laskennallisia keinoja, joita kutsutaan **derivoimiskaavoiksi**.

Lyhyessä matematiikassa kaavoja esiintyy vain muutama. Nämä kaavat voidaan perustella graafisen tavan avulla. Kaavojen täsmällinen johtaminen sivuutetaan.

Ensimmäisen asteen polynomifunktio $f(x) = ax$

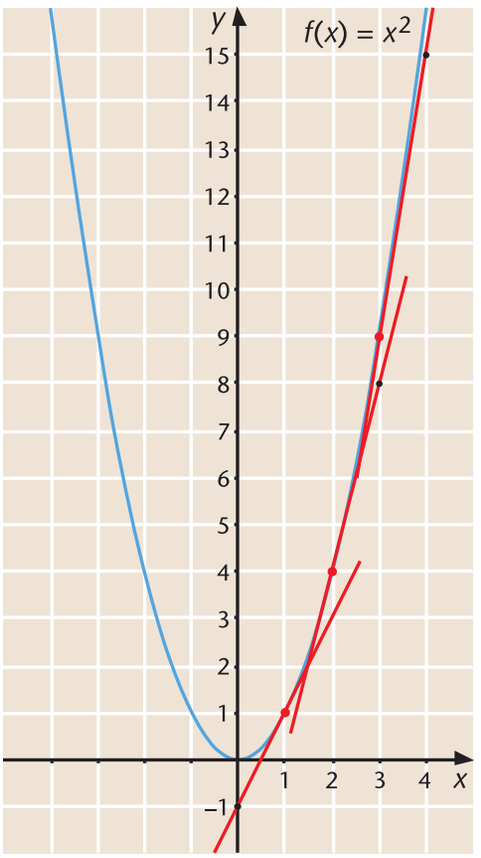
Ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax$ kuvaaja on suora. Kuvaajalle mihin tahansa pisteeseen piirretty tangentti yhtyy funktion kuvaajaan. Tangentin kulmakerroin on siis jokaisessa pisteessä yhtä suuri kuin itse suoran kulmakerroin.



Huomaa: jos funktio on vakiofunktio $f(x) = k$ (k on vakio), kuten $f(x) = 4$, on sen derivaatta aina 0.

Potenssifunktio $f(x) = x^n$

Tarkastellaan funktion $f(x) = x^2$ tangentin kulmakertoimia muutamassa kohdassa. Funktion kuvaajalle piirretyt tangentit eivät yhdy funktion kuvaajaan. Tangenttien kulmakertoimien arvo siis vaihtelee tarkasteltavasta kohdasta riippuen



Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = \frac{15-9}{4-3} = 6$.

$f'(3) = 6 = 2 \cdot 3$

Kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = \frac{8-4}{3-2} = 4$.

$f'(2) = 4 = 2 \cdot 2$

Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = \frac{1-(-1)}{1-0} = 2$.

$f'(1) = 2 = 2 \cdot 1$

Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = x^2$ derivaatta

$f'(x) = 2x$

Samaan tapaan voitaisiin perustella muidenkin potenssifunktioiden derivaatat.

Funktio $f(x)$	Derivaatta $f'(x)$
x^2	$2x^1 = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$
x^3	$3x^2 = 3 \cdot x^{3-1}$
x^4	$4x^3 = 4 \cdot x^{4-1}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Funktion derivaatta saadaan funktion lausekkeesta seuraavasti:

- Eksponentti n siirretään funktion eteen kertojaksi.
- Funktion eksponentti on vähentynyt yhdellä, jolloin uusi eksponentti on $n - 1$.

Funktion **derivoiminen** tarkoittaa derivaattafunktion määrittämistä. Tätä voidaan merkitä kahdella eri tavalla.

Kummassakin tavassa esiintyy sekä derivoitavan funktion lauseke että itse derivaatan lauseke.

Tapa 1

Jos funktiolle on annettu nimi, esimerkiksi $f(x) = x^2$, derivaatan voi ilmaista lyhyesti pilkun avulla:

$$f'(x) = 2x$$

Tapa 2

Jos funktiosta on annettu vain derivoitava lauseke, esimerkiksi x^2, derivaatan voi ilmaista D-operaattorin avulla:

$$Dx^2 = 2x$$

Derivoimiskaava	**Esimerkkejä**	
	Tapa 1	**Tapa 2**
Vakiofunktion $f(x) = k$ derivaatta (k on vakio) **$f'(x) = Dk = 0$**	$f(x) = 4$ $f'(x) = 0$	$D4 = 0$
	$f(x) = -7$ $f'(x) = 0$	$D(-7) = 0$
	$f(x) = 0$ $f'(x) = 0$	$D0 = 0$
Ensimmäisen asteen funktion $f(x) = ax$ derivaatta **$f'(x) = Dax = a$**	$f(x) = 2x$ $f'(x) = 2$	$D(2x) = 2$
	$f(x) = -8x$ $f'(x) = -8$	$D(8x) = 8$
	$f(x) = 0{,}7x$ $f'(x) = 0{,}7$	$D(0{,}7x) = 0{,}7$
Potenssifunktion $f(x) = x^n$ derivaatta **$f'(x) = Dx^n = n \cdot x^{n-1}$**	$f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$	$D(x^3) = 3x^2$
	$f(x) = x^8$ $f'(x) = 8x^7$	$D(x^8) = 8x^7$
	$f(x) = x^{15}$ $f'(x) = 15x^{14}$	$D(x^{15}) = 15x^{14}$

Huomaa:
$Dx = Dx^1 = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$

Derivoimissäännöt

Edellä esiteltyjen derivoimiskaavojen lisäksi polynomifunktioiden derivoimisessa käytetään kahta derivoimissääntöä.

- Jos funktion edessä on **vakiokerroin**, se voidaan siirtää suoraan derivaatan kertoimeksi.

Funktio	Derivaatta
$3x^2$	$\mathrm{D}(3x^2) = 3\,\mathrm{D}(x^2) = 3 \cdot 2x^1 = 6x$
$-5x^3$	$\mathrm{D}(-5x^3) = -5\,\mathrm{D}(x^3) = -5 \cdot 3x^2 = -15x^2$
$\frac{3}{4}x^4$	$\mathrm{D}\left(\frac{3}{4}x^4\right) = \frac{3}{4}\mathrm{D}(x^4) = \frac{3}{4} \cdot 4x^3 = 3x^3$
kx^5	$\mathrm{D}(kx^5) = k\,\mathrm{D}(x^5) = k \cdot 5x^4 = 5kx^4$
kf	$\mathrm{D}(kf) = k \cdot \mathrm{D}f$

- Polynomifunktiot sisältävät usein **monia termejä** eli yhteenlaskettavia. Termit derivoidaan jokainen erikseen. Saadut derivaatat lasketaan sen jälkeen yhteen.

Funktio	Derivaatta
$x^2 + 5x$	$\mathrm{D}(x^2 + 5x) = \mathrm{D}(x^2) + \mathrm{D}(5x) = 2x + 5$
$-4x^3 + x$	$\mathrm{D}(-4x^3 + x) = \mathrm{D}(-4x^3) + \mathrm{D}(x)$ $= -4 \cdot 3x^2 + 1$ $= -12x^2 + 1$
$7x^4 - x^2 - 1$	$\mathrm{D}(7x^4 - x^2 - 1) = \mathrm{D}(7x^4) + \mathrm{D}(-x^2) + \mathrm{D}(-1)$ $= 7 \cdot 4x^3 - 2x + 0$ $= 28x^3 - 2x$
$f + g$	$\mathrm{D}(f + g) = \mathrm{D}(f) + \mathrm{D}(g)$

Koska erotus voidaan aina kirjoittaa yhteenlaskun avulla, myös termien erotuksessa voidaan tekijät derivoida erikseen.

Derivoimissäännnöt

- Vakion siirtosääntö: $\mathbf{D}kf = k\,\mathbf{D}f$ (k on vakio)
- Summan ja erotuksen derivointi: $\mathbf{D}(f+g) = \mathbf{D}f + \mathbf{D}g$

ESIMERKKI 1

Derivoi funktio

a) $f(x) = 6x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 5x$ c) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

RATKAISU

a) $f'(x) = \mathrm{D}(6x^2)$
$= 6\,\mathrm{D}x^2$
$= 6 \cdot 2x$
$= 12x$

$\mathrm{D}kf = k\,\mathrm{D}f$
$\mathrm{D}x^n = n \cdot x^{n-1}$

b) Derivoidaan funktio termeittäin.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(2x^3 + 5x) \\ &= \mathrm{D}(2x^3) + \mathrm{D}(5x) \\ &= 2\mathrm{D}(x^3) + \mathrm{D}(5x) \\ &= 2 \cdot 3x^2 + 5 \\ &= 6x^2 + 5 \end{aligned}$$

c) Derivoidaan funktio termeittäin.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) \\ &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}x\right) - \mathrm{D}\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$

VASTAUS a) $f'(x) = 12x$ b) $f'(x) = 6x^2 + 5$ c) $f'(x) = \frac{1}{2}$

Tällä kurssilla käsitellään vain summan derivointia. Jos polynomifunktio sisältää kerto- tai jakolaskuja, ne on laskettava ensin. Derivointi suoritetaan siis vasta sievennetystä funktion lausekkeesta.

ESIMERKKI 2

Derivoi funktiot.

a) $f(x)=2(3x^4-5)$ b) $f(x)=(x+2)^2$ c) $f(x)=\dfrac{8x^6-4x^2+2x}{2}$

RATKAISU

a) Sievennetään ensin suorittamalla kertolasku. Vasta tämän jälkeen voidaan käyttää derivoimissääntöjä.

$$f(x)=2\cdot 3x^4+2\cdot(-5)=6x^4-10$$

Lasketaan funktion $f(x)=6x^4-10$ derivaatta.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(6x^4-10)\\ &= \mathrm{D}(6x^4)+\mathrm{D}(-10)\\ &= 6\cdot 4x^3-0\\ &= 24x^3 \end{aligned}$$

b) Sievennetään ensin suorittamalla kertolasku. Vasta tämän jälkeen voidaan käyttää derivoimissääntöjä.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^2\\ &= (x+2)(x+2)\\ &= x^2+2x+2x+4\\ &= x^2+4x+4 \end{aligned}$$

Muuta potenssi kertolaskuksi.

Derivoidaan funktio $f(x)=x^2+4x+4$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(x^2+4x+4)\\ &= \mathrm{D}(x^2)+\mathrm{D}(4x)+\mathrm{D}(4)\\ &= 2x+4 \end{aligned}$$

c) Suoritetaan jakolasku ennen derivointia.

$$f(x) = \frac{8x^6 - 4x^2 + 2x}{2}$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\, x^6}{\underset{1}{\cancel{2}}} - \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\, x^2}{\underset{1}{\cancel{2}}} + \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\, x}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$= 4x^6 - 2x^2 + x$$

Derivoidaan funktio $f(x) = 4x^6 - 2x^2 + x$.

$$f'(x) = \mathrm{D}(4x^6 - 2x^2 + x)$$
$$= \mathrm{D}(4x^6) - \mathrm{D}(2x^2) + \mathrm{D}x$$
$$= 4 \cdot 6x^5 - 2 \cdot 2x + 1$$
$$= 24x^5 - 4x + 1$$

VASTAUS a) $f'(x) = 24x^3$ b) $f'(x) = 2x + 4$ c) $f'(x) = 24x^5 - 4x + 1$

ESIMERKKI 3 Laske $f(3)$ ja $f'(3)$ kun $f(x) = 5x(x^2 - 3x + 1)$.

RATKAISU Sievennetään ensin funktion lauseke suorittamalla kertolasku.

$$f(x) = 5x(x^2 - 3x + 1)$$
$$= 5x^3 - 15x^2 + 5x$$
$$f(3) = 5 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 = 15$$

Lasketaan funktion derivaatta.

$$f'(x) = \mathrm{D}(5x^3) - \mathrm{D}(15x^2) + \mathrm{D}(5x)$$
$$= 5 \cdot 3x^2 - 15 \cdot 2x + 5$$
$$= 15x^2 - 30x + 5$$
$$f'(3) = 15 \cdot 3^2 - 30 \cdot 3 + 5 = 50$$

VASTAUS $f(3) = 15$ ja $f'(3) = 50$

Tehtäviä

87. Derivoi.
a) -5 b) $-4{,}3x$ c) $\frac{4}{7}x$ d) $\frac{x}{3}$

88. Derivoi funktiot.
a) $f(x) = x^3$ b) $m(x) = -4x^3$
c) $g(t) = \frac{3}{5}t^5$ d) $h(r) = 0{,}6r^7$

E1 89. Derivoi.
a) $f(x) = -5x^3$ b) $f(x) = 3x^2 - x + 4$ c) $f(x) = \frac{2x}{3} + \frac{4}{5}$

90. Laske funktion f derivaatta, kun
a) $f(x) = 10x + 6$ b) $f\,(r) = -3r^3 - 0{,}5$
c) $f(x) = -7x^3 - 5x + 3$ d) $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t - 1.$

91. Derivoi.
a) $f(x) = -x^3 + 4x$ b) $f(x) = 12x^2 - 1$
c) $f(x) = -3x^5 + 0{,}3x^4 - 5x^2$ d) $f(r) = 6 - \frac{7}{3}r^6$

92. Laske.
a) $\mathrm{D}(3x^{11} + 4x)$ b) $\mathrm{D}(-5b^3 + 1)$
c) $\mathrm{D}(-3x^8 - 4x^3 + x^2)$ d) $\mathrm{D}(25 - 7x - 0{,}5x^2)$

93. Laske.
a) $\mathrm{D}\left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)$ b) $\mathrm{D}(4x - 7 + x^4)$
c) $\mathrm{D}\left(\frac{3x^2}{5} - \frac{4x}{5}\right)$ d) $\mathrm{D}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}\right)$

E2 94. Derivoi funktiot.
a) $f(x) = 5x(2x^3 + 3x)$ b) $f(x) = (x - 5)^2$
c) $f(x) = \frac{9x^4 + 3x^2 - 6x}{3}$ d) $f(x) = 2x^2 - x(3x - 4)$

95. Laske funktion g derivaatta, kun
a) $g(x) = 4(x^2 - 1)$ b) $g(x) = x^2(2x + 6)$
c) $g(t) = (t - 3)^2$ d) $g(r) = (r - 1)(r + 1).$

96. Derivoi funktiot.

a) $m(t) = -\frac{2t}{6}$ b) $h(x) = \frac{x+3}{5}$

c) $g(x) = \frac{6x^5 - 12x^3 + 3}{3}$ d) $f(r) = \frac{4r^5 - 2r^2 + 16r}{-2}$

97. Esitä funktio $f(x) = \left(\frac{5x-4}{3}\right)^2$ polynomina ja derivoi tämä polynomi. [K1993, 2a]

E3 98. Laske $k(2)$ ja $k'(2)$, kun $k(r) = -3r^4 + \frac{1}{3}$.

99. Laske $m(-1)$ ja $m'(-1)$, kun $m(t) = 2t^6 - 4t^2 - 5$.

100. Olkoon $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ ja $P'(x)$ sen derivaatta. Laske $P(-2)$ ja $P'(-2)$. [K1989, 1]

101. Laske polynomin $x^6 + x^3$ derivaatan arvo pisteessä $x = -\frac{1}{2}$. [K1990, 1]

Sekalaisia tehtäviä

102. Derivoi.

a) $h(x) = -0{,}4x^5 - x$ b) $n(r) = r^{20} - 3{,}4r^3 + 4{,}8$

c) $f(t) = t^{15} + 8t^4 - \frac{1}{3}t^3$ d) $f(x) = -\frac{x}{6} - \frac{2}{7}$

103. Laske.

a) $\mathrm{D}[2x(x+5)]$ b) $\mathrm{D}[(x+1)(2x+2)]$

c) $\mathrm{D}(2x-1)^2$ d) $\mathrm{D}[(3x^2 - 2x(x^2 - 5x)]$

104. Laske.

a) $\mathrm{D}\left(\frac{3x^2 - 5x}{15}\right)$ b) $\mathrm{D}\left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 8}{-4}\right)$

105. Laske $f(4)$ ja $f'(4)$, kun

a) $f(x) = -3(-x^2 + 1)$ b) $f(x) = (2x - 3)(-x + 1)$.

2.3 Derivaatan arvo

POHDINTA 1 Ratkaise kuvaajien avulla

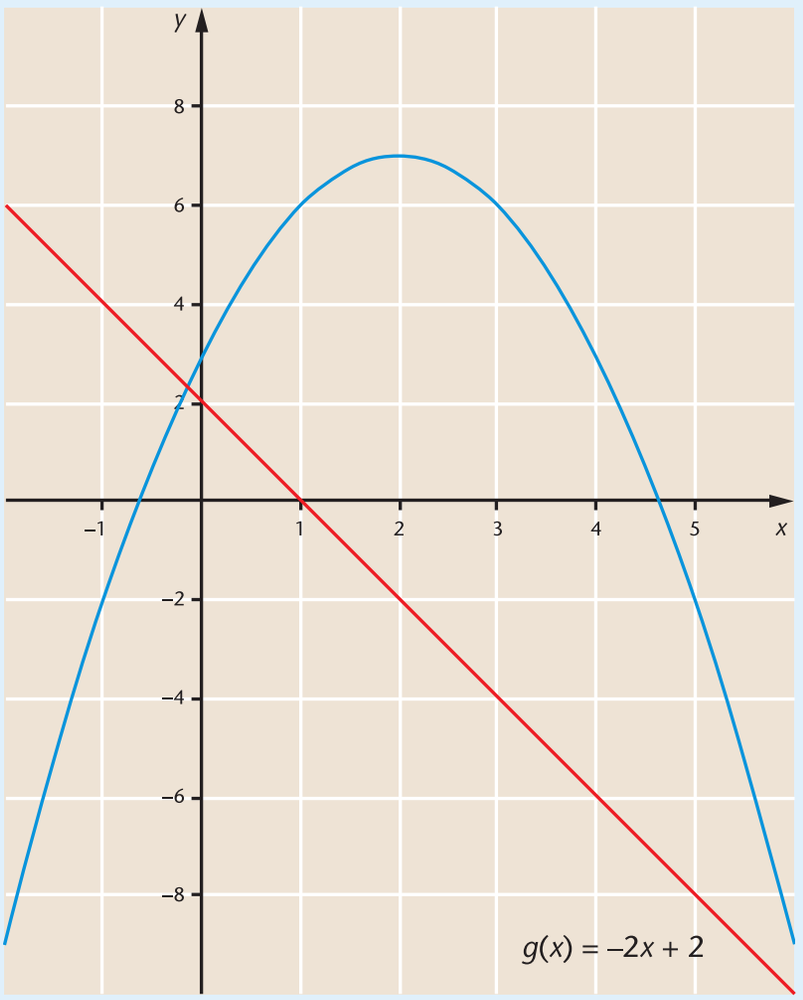
a) $f(1)$

b) $f(x) = -2$

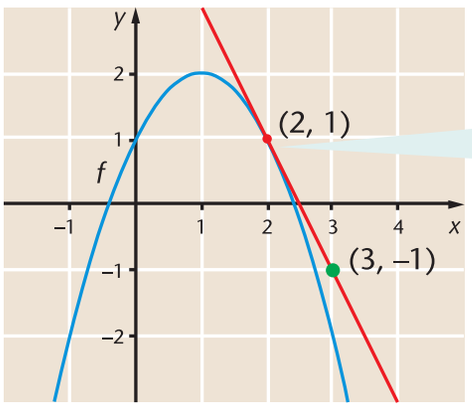
c) $f'(1)$

d) $f'(x) = 0$

e) $f'(x) = -2$.

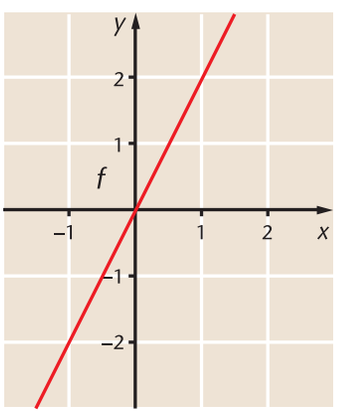


Kun luvussa 2.1 selvitettiin funktion kuvaajan avulla funktion f derivaatta määrätyssä pisteessä, piirrettiin tähän pisteeseen tangenttisuora ja laskettiin tangenttisuoran kulmakerroin. Kuvan funktion derivaatta kohdassa $x = 2$ on -2, koska pisteeseen $(2, 1)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on -2.

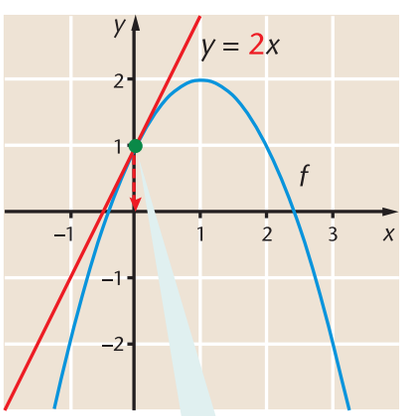


Kun selvitetään graafisesti sitä, missä kohdassa (eli millä muuttujan x arvolla) funktion derivaatta saa esimerkiksi arvon 2, ratkaistaan graafisesti yhtälöä $f'(x) = 2$. Kohta, jossa funktion derivaatta saa tietyn arvon, voidaan löytää seuraavasti:

- Piirretään ensin suora $y = 2x$. (Tämän kulmakerroin on 2 eli sama kuin haluttu derivaatan arvo.)



- Siirretään suora funktion f kuvaajalle kohtaan, jossa suoralla ja funktiolla f on yksi yhteinen piste eli suora on funktion f tangentti.



- Tangentti kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta eli yhtälön $f'(x) = 2$ ratkaisuna on $x = 0$.

Tangentti kulkee pisteen (0, 1) kautta.
Tangentin kulmakerroin on 2.
$f'(0) = 2$

Kun analysoidaan funktiota derivaatan avulla, voidaan erottaa kaksi tilannetta

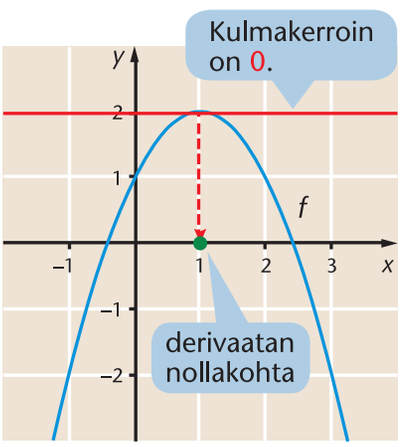
- Kun halutaan laskea **derivaatan arvo määrätyssä kohdassa** $x = a$, derivaatan lausekkeeseen sijoitetaan muuttujan x paikalle haluttu luku a eli lasketaan $f'(a)$.

- Kun halutaan tietää, **missä kohdassa derivaatta saa määrätyn arvon** b, ratkaistaan yhtälö $f'(x) = b$.

Tärkeä erikoistapaus derivaattaan liittyvissä ongelmissa on kohta, jossa derivaatta saa arvon nolla. **Derivaatan nollakohdissa** sivuamispisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla eli tangentti on x-akselin suuntainen suora.

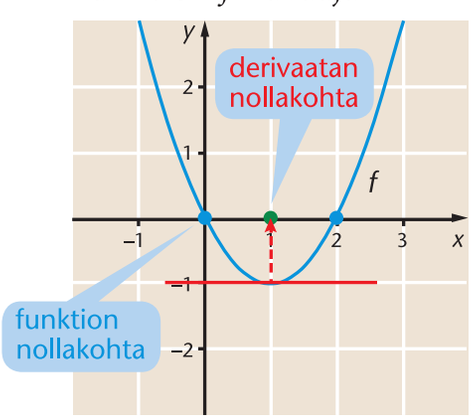
Kuvan funktion f derivaatan nollakohta on $x = 1$, koska pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla.

$f'(x) = 0$, kun $x = 1$

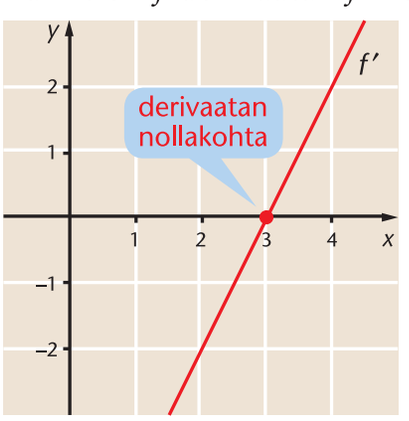


Jos tehtävään liittyy kuvaaja, on varmistuttava siitä, onko kuvaaja funktion vai sen derivaatan. Derivaatan nollakohdat voidaan lukea molemmista kuvaajista, mutta funktion nollakohdat nähdään vain funktion kuvaajasta.

Funktion f kuvaaja



Funktion f derivaatan f' kuvaaja



ESIMERKKI 1 Olkoon $f(x) = 4x^2 - 5x - 1$.

a) Määritä funktion f derivaatta kohdassa $x = 2$.

b) Millä muuttujan x arvolla derivaatta saa arvon 2?

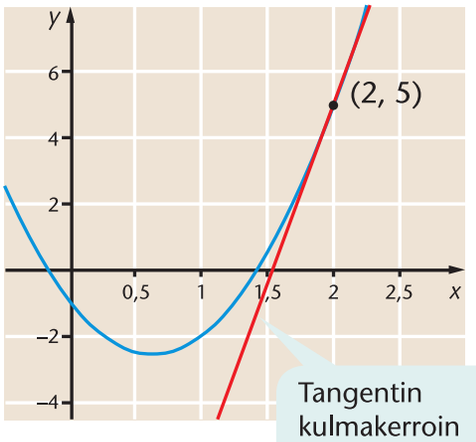
RATKAISU

Funktion f derivaatta

$f'(x) = 4 \cdot 2x - 5 = 8x - 5$

a) Derivaatan arvo kohdassa $x = 2$ lasketaan sijoittamalla funktion derivaatan lausekkeeseen luku 2 muuttujan paikalle:

$$f'(2) = 8 \cdot 2 - 5 = 11$$

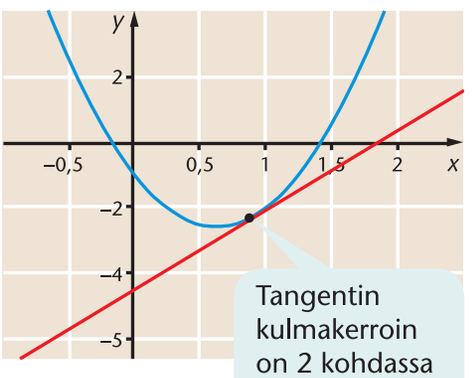


Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 2$ on 11.

b) Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 8x - 5$

$$\begin{aligned} 8x - 5 &= 2 \\ 8x &= 7 \quad | : 8 \\ x &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$



Tangentin kulmakerroin on 2 kohdassa $x = \frac{7}{8}$.

VASTAUS a) $f'(2) = 11$ b) $x = \frac{7}{8}$

ESIMERKKI 2 Määritä vakio a siten, että $g'(-2) = -10$, kun $g(x) = ax^3 - \frac{1}{4}x^2 - ax$.

RATKAISU

Derivoidaan ensin funktio g. Funktio derivoidaan muuttujan x suhteen, jolloin vakiota a käsitellään kuten lukua.

$$g'(x) = a \cdot 3x^2 - \frac{1}{4} \cdot 2x - a = 3ax^2 - \frac{1}{2}x - a$$

Kun $x = -2$, derivaatta saa arvon -10 eli $g'(-2) = -10$. Sijoittamalla muuttujan x paikalle luku -2 saadaan yhtälö, josta ratkaistaan a.

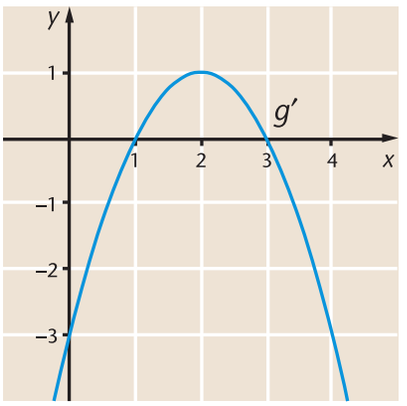
$$\begin{aligned} 3a \cdot (-2)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-2) - a &= -10 \\ 12a + 1 - a &= -10 \\ 11a &= -11 \quad | : 11 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

VASTAUS $a = -1$

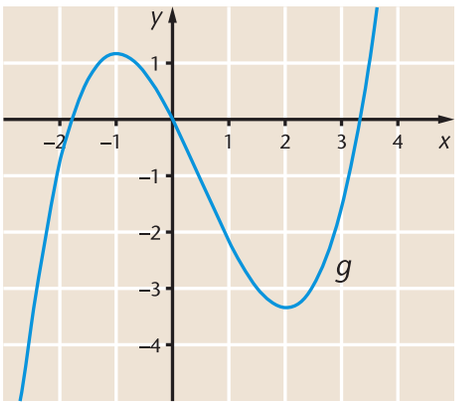
ESIMERKKI 3

Määritä kuvaajan avulla funktion g derivaatan nollakohdat, kun kuvaaja esittää

a) funktion derivaattaa g'

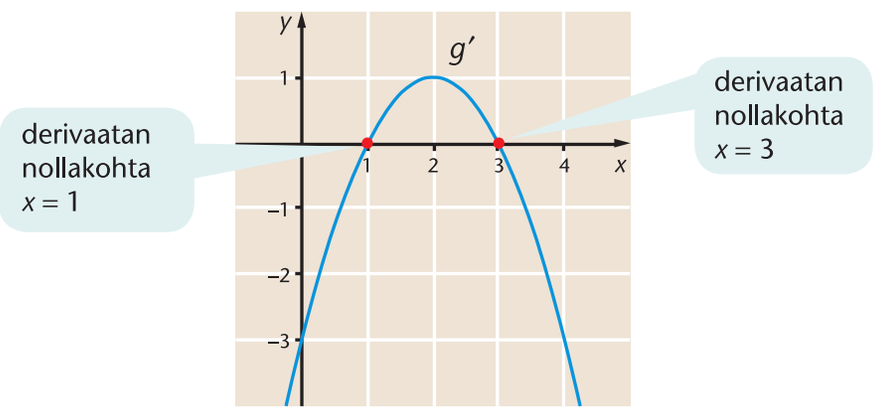


b) funktiota g.



RATKAISU

a) Koska kuvaaja esittää derivaattafunktiota g', derivaatan nollakohdissa kuvaaja leikkaa x-akselin. Näitä kohtia on kaksi kappaletta:

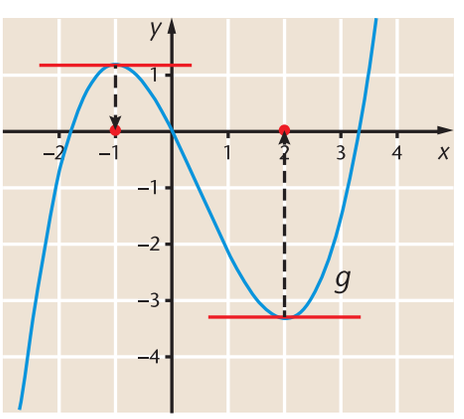


b) Funktion kuvaajan nollakohdat eivät kerro mitään derivaatan nollakohdista. Derivaatta saa arvon nolla niissä kohdissa, joissa funktiolle piirretty tangentti on vaakasuora.

Funktion kuvaajalle voidaan piirtää kahteen pisteeseen tangentti, jonka kulmakerroin on nolla eli tangentti on x-akselin suuntainen.

Derivaatan nollakohdat luetaan x-akselilta:

$$x = -1 \text{ tai } x = 2$$



VASTAUS

a) $x = 1$ tai $x = 3$

b) $x = -1$ tai $x = 2$

ESIMERKKI 4 Laske funktion f derivaatan nollakohdat, kun
a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ b) $f(x) = 5x^3 - 3x^2$.

RATKAISU a) Tehtävässä on tarkoitus ratkaista yhtälö $f'(x) = 0$. Määritetään sitä varten funktion f derivaatta f'.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x - 4 = 4x - 4$$

Derivaatta saa arvon nolla eli $f'(x) = 0$, kun

$$\begin{aligned} 4x - 4 &= 0 \\ 4x &= 4 \quad \big| : 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

b) Derivoidaan funktio f.

$$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = 15x^2 - 6x$$

Derivaatta $f'(x) = 0$, kun $15x^2 - 6x = 0$. Yhtälö voidaan ratkaista kahdella eri tavalla.

Tapa 1 Ratkaisukaava

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 0}}{2 \cdot 15}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36}}{30}$$

$$x = \frac{6 \pm 6}{30}$$

$$x = \frac{2}{5} \quad \text{tai} \quad x = 0$$

Tapa 2 Tulon nollasääntö

$$\begin{aligned} 15x^2 - 6x &= 0 \\ x(15x - 6) &= 0 \\ x = 0 \quad &\text{tai} \quad 15x - 6 = 0 \\ 15x &= 6 \quad \big| : 15 \\ x &= \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

VASTAUS a) $x = 1$ b) $x = 0$ tai $x = \frac{2}{5}$

ESIMERKKI 5 Funktion $f(x) = x^2 - 8x + 19$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Määritä tämän paraabelin huippupiste.

RATKAISU Paraabelin huippuun piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla. Huippupisteen x-koordinaatti on siis derivaatan nollakohta.

Määritetään funktion f derivaatta ja ratkaistaan sen nollakohdat:

$$f'(x) = 2x - 8$$

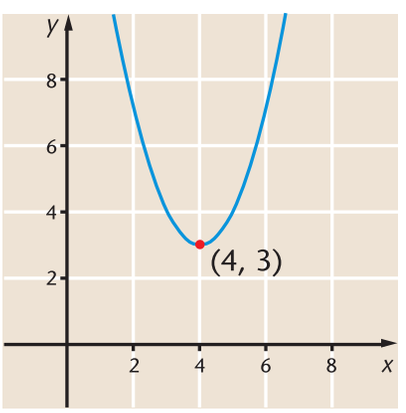
$f'(x) = 0$, kun

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 0 \\ 2x &= 8 \quad \big| : 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Huipun y-koordinaatti lasketaan sijoittamalla $x = 4$ alkuperäiseen funktioon f, koska huippu on funktion f piste, ei derivaatan.

$$y = f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 19 = 3$$

Paraabelin huippupiste on siis $(4, 3)$.



VASTAUS $(4, 3)$

Tehtäviä

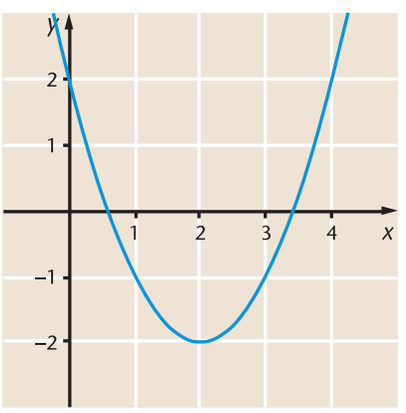
E1 106. Tutkitaan funktiota $f(x) = -x^2 + 3x - 1$.
a) Määritä funktion f derivaatta kohdassa $x = -3$
b) Millä muuttujan x arvolla funktion f derivaatta saa arvon -3?

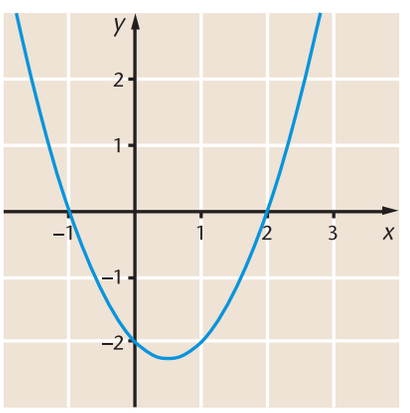
107. Olkoon $g(x) = 3x^2 - 4x$.
a) Määritä $g(5)$.
b) Ratkaise yhtälö $g(x) = 20$.

108. Ratkaise yhtälö $g'(t) = 5$, kun $g(t) = t(t^2 - 9t + 32)$.

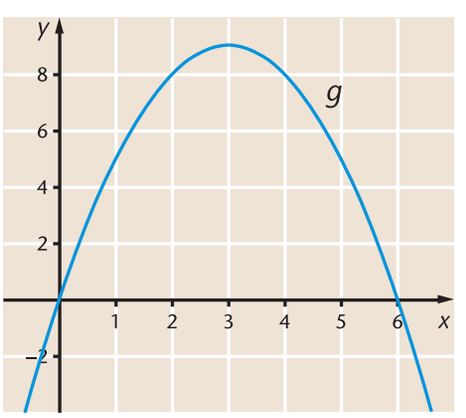
109. Millä muuttujan x arvoilla funktion $g(x) = (x+2)^2$ derivaatta saa arvon 4?

E3 110. Määritä kuvaajan avulla funktion f derivaatan nollakohdat, kun kuvaaja esittää
a) funktiota f b) derivaattafunktiota f'.

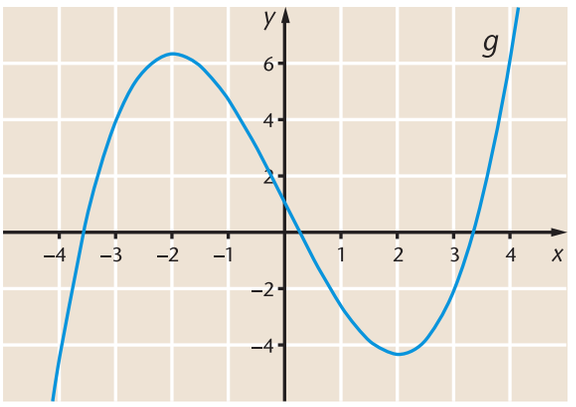




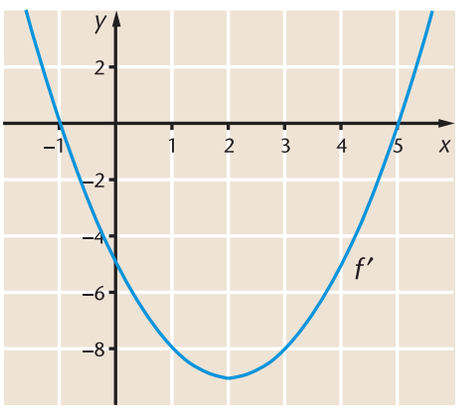
111. Määritä kuvaajan avulla funktion g nollakohdat sekä derivaatan g' nollakohdat.



112. Määritä kuvaajan avulla derivaatan nollakohdat funktiolle g.



113. Määritä derivaatan nollakohdat, kun kuvaaja esittää funktion f derivaattaa f'.



114. Millä x:n arvoilla tulon $x(x+1)$ derivaatta on 2? [S1988, 1b]

115. Olkoon funktio $f(x) = x^3 - 7x$. Missä kuvaajan pisteessä tangentin kulmakerroin on 5?

116. Laske funktion f derivaatan nollakohdat.
a) $f(x) = 3x^2 + 6x$ b) $f(x) = -2x^2 + 7$

E4 117. Laske funktion f derivaatan nollakohdat, kun
a) $f(x) = -8x^2 + 12x$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 80x + 5$.

118. Laske derivaatan nollakohdat, kun
a) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 48x + 1$
b) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 + 60x - 8$.

119. Millä muuttujan x arvoilla $f'(x) = 0$, kun
a) $f(x) = (x+1)(x-9)$ b) $f(x) = x^2(4x-21) - 24x$?

120. Määritä polynomin $x^3 - x^2 - 21x + 1$ derivaatan nollakohdat. [S1987, 2a]

121. Ratkaise yhtälö $f'(x) = -2$, kun
a) $f(x) = 5x^2 + 8x - 1$ b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$.

E5 122. Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 6$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Määritä tämän paraabelin huippupiste.

123. Laske funktion $f(x) = 8x^2 - 48x + 3$ kuvaajan huipun
a) x-koordinaatti b) y-koordinaatti.

E2 124. Olkoon $f(x) = kx^2 + 5x - 3$. Määritä vakio k siten, että $f'(-1) = 4$.

125. Määritä vakio a siten, että funktiolla $g(x) = -2x^3 + ax^2 - 2ax$ on derivaatan nollakohta $x = -2$.

126. Ojan poikkileikkaus on paraabelin $y = 0{,}5x^2 + x - 1{,}2$ x-akselin alapuolisen osan muotoinen. Määritä ojan suurin syvyys, kun koordinaatiston yksikkönä on metri.

127. Maakellarin maanpäällisen osan poikkileikkaus on funktion $h(x) = -0{,}25x^2 + 0{,}50x + 2{,}1$ x-akselin yläpuolisen osan muotoinen. Laske kuinka korkea maakellari on korkeimmalta kohdaltaan, kun koordinaatiston yksikkönä on metri.

128. Funktion $g(x) = 4x^2 + 32x + a$ huippu on suoralla $y = -1$. Laske vakion a arvo.

Sekalaisia tehtäviä

129. Olkoon $f(x) = x^3 - x^2 + 2$.
a) Määritä $f'(-4)$.
b) Ratkaise yhtälö $f'(x) = 5$.

130. Millä muuttujan x arvoilla funktion $g(x) = x(x - 4)$ derivaatta saa arvon
a) 8 b) -9?

131. Määritä funktion g derivaatan nollakohdat, kun
a) $g(x) = -3x^2 + 9x - 9$ b) $g(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 4x$.

132. Määritä paraabelin $y = x^2 - 6x + 14$ huippupiste.

133. Sillan metallikaari on likimain paraabelin $y = -0{,}0187x^2 + 1{,}1613x$ x-akselin yläpuolisen osan muotoinen. Kuinka korkea kaari on korkeimmalta kohdaltaan? Koordinaatiston yksikkönä on metri.

2.4 Derivaatan merkki

POHDINTA 1 Ratkaise kuvaajan perusteella

a) $f(x) = 0$

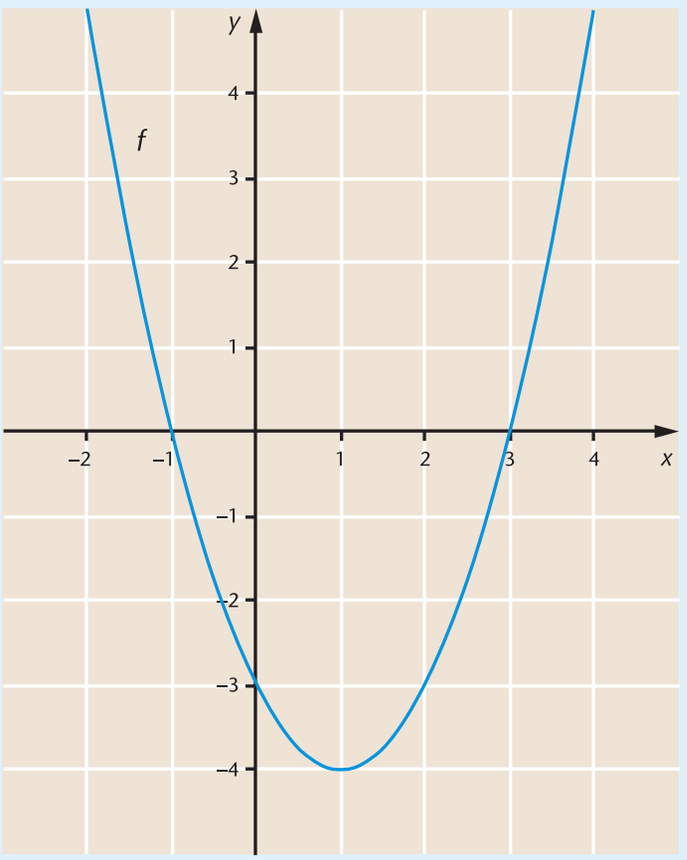
b) $f(x) > 0$

c) $f(x) < 0$

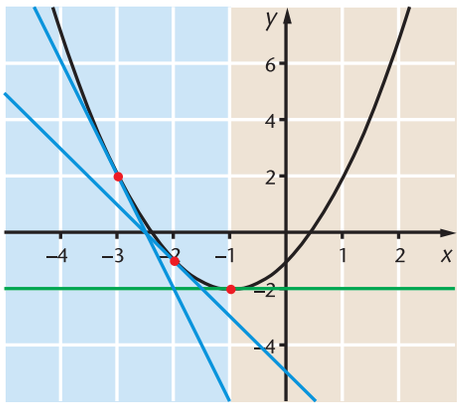
d) $f'(x) = 0$

e) $f'(x) > 0$

f) $f'(x) < 0$.



Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Funktiolle on piirretty tangentit pisteisiin $(-3, 2)$, $(-2, -1)$ ja $(-1, -2)$.

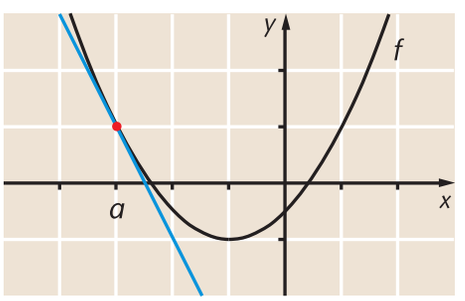


Kohdissa $x = -3$ ja $x = -2$ tangentti on laskeva suora, joten sen kulmakerroin on negatiivinen. Tällöin $f'(x) < 0$.

Kohdassa $x = -1$ tangentti on x–akselin suuntainen eli $f'(x) = 0$.

Kuvaajasta nähdään, että kun muuttuja x saa pienempiä arvoja kuin -1, kaikki funktion f tangentit ovat laskevia suoria eli niiden kulmakertoimet ovat negatiivisia. Niinpä myös funktion derivaatta saa negatiivisia arvoja, kun $x < -1$.

Funktiolle f kohtaan $x = a$ piirretty tangentti on laskeva suora.



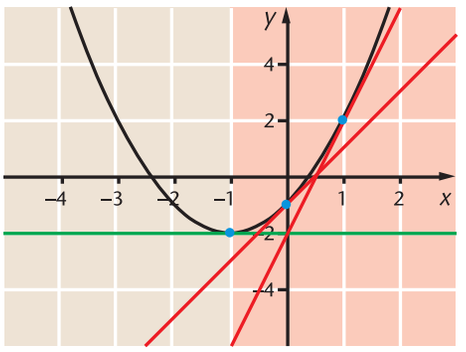
↓

Tangentin kulmakerroin on negatiivinen.

↓

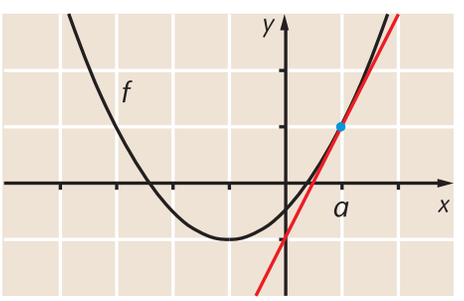
Funktion f derivaatta on negatiivinen kohdassa $x = a$ eli $f'(a) < 0$

Saman funktion kohtiin $x = 0$ ja $x = 1$ piirretyt tangentit ovat nousevia suoria, joten niiden kulmakertoimet ovat positiivisia. Näin myös funktion f derivaatta on positiivinen näissä kohdissa.



Kuvasta nähdään, että kun muuttuja x saa suurempia arvoja kuin -1, funktion derivaatta saa koko ajan positiivisia arvoja eli $f'(x) > 0$.

Funktiolle f kohtaan $x = a$ piirretty tangentti on nouseva suora.

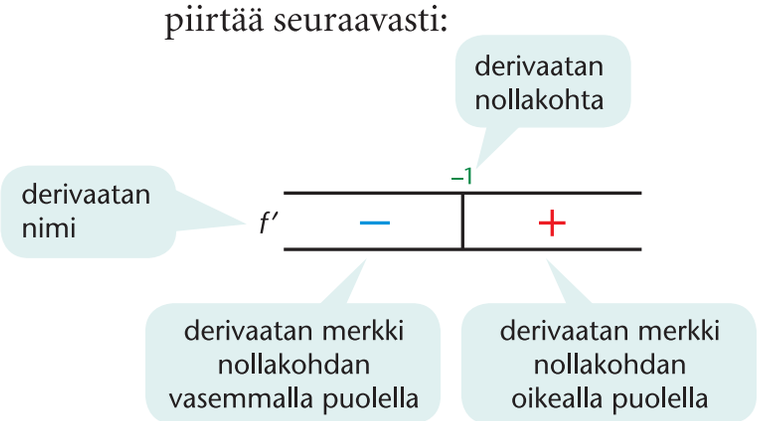


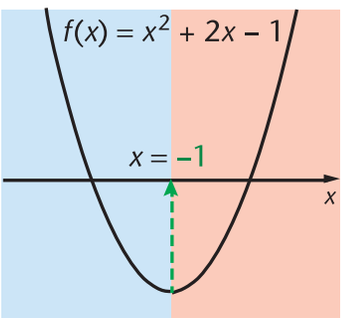
Tangentin kulmakerroin on positiivinen.

Funktion f derivaatta on positiivinen kohdassa $x = a$ eli $f'(a) > 0$

Derivaatan merkki riippuu siis derivaatan nollakohdista. Derivaatan merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Nollakohtien lisäksi tarvitaan avuksi derivaatan kuvaaja tai **merkkikaavio**.

Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 1$ derivaatan merkkikaavio voidaan piirtää seuraavasti:





Derivaatan nollakohtia ei saa koskaan katsoa kuvaajasta, ellei tehtävänanto niin edellytä. Ne ratkaistaan yhtälön avulla merkitsemällä derivaatan lauseke nollaksi eli $f'(x) = 0$.

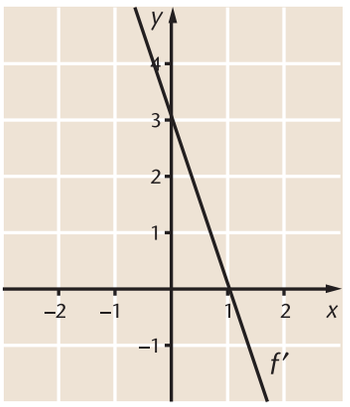
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Kun tutkitaan derivaatan merkkiä,

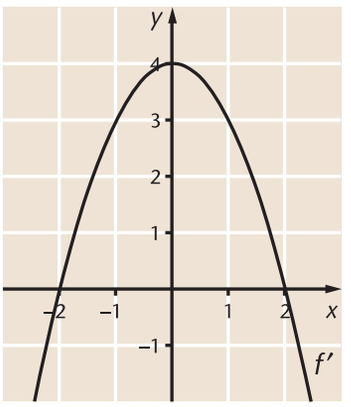
1. **derivoidaan** funktio
2. **lasketaan** derivaatan **nollakohdat**
3. **hahmotellaan** derivaatan **kuvaaja** tai laaditaan derivaatan merkkikaavio
4. **päätellään** kuvaajan tai merkkikaavion avulla **derivaatan merkki**.

ESIMERKKI 1 Päättele funktion f derivaatan f' kuvaajan avulla derivaatan merkki ja laadi merkkikaavio derivaatalle.

a)



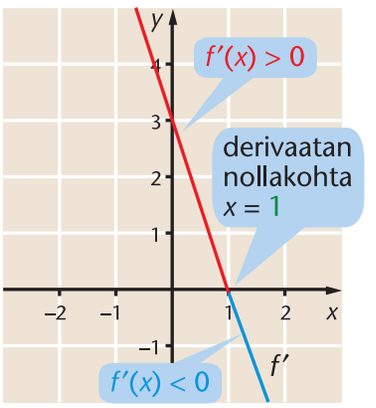
b)



RATKAISU

a) Derivaatan nollakohta on $x = 1$.

Derivaatan kuvaaja on x-akselin yläpuolella, kun muuttuja x saa pienempiä arvoja kuin 1 eli $x < 1$. Tällöin derivaatta on positiivinen.



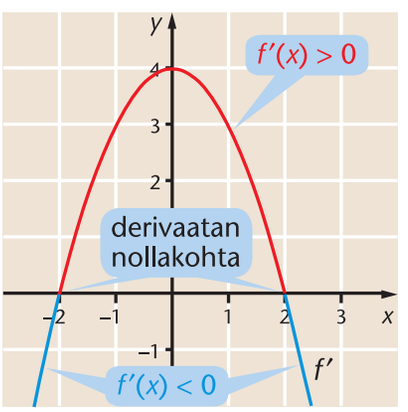
Kuvaaja on x-akselin alapuolella, kun $x > 1$. Tällöin derivaatta on negatiivinen.

Merkkikaavio:

		1	
f'	+	0	−

b) Derivaatan nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$.

Kuvaaja on x-akselin yläpuolella eli $f'(x) > 0$, kun $-2 < x < 2$.



Kuvaaja on x-akselin alapuolella eli $f'(x) < 0$, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

Merkkikaavio:

		−2		2	
f'	−	0	+	0	−

VASTAUS

a) $f'(x) > 0$, kun $x < 1$; $f'(x) < 0$, kun $x > 1$

b) $f'(x) > 0$, kun $-2 < x < 2$;
$f'(x) < 0$, kun $x < -2$ tai $x > 2$

ESIMERKKI 2 Ratkaise epäyhtälö $f'(x) > 0$, kun

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ b) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

RATKAISU

a) 1 **Derivoidaan** funktio.

$$f'(x) = 2x - 8$$

On siis ratkaistava epäyhtälö $2x - 8 > 0$.

Tapa 1

Ensimmäisen asteen epäyhtälö voidaan ratkaista ilman kuvaajaa muokkaamalla epäyhtälöä.

$$\begin{aligned} 2x - 8 &> 0 \\ 2x &> 8 \quad | : 2 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

Tapa 2

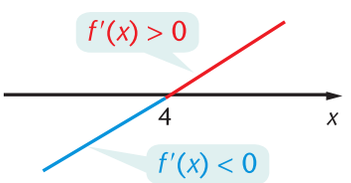
2 **Ratkaistaan** derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 0 \\ 2x &= 8 \quad | : 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

3 **Hahmotellaan** derivaatan **kuvaaja** (nouseva suora).

Merkkikaavio:

	4	
f'	−	+



4 Kuvaajasta nähdään, että $f'(x) > 0$ kun $x > 4$.

b) Funktion f derivaatta on $f'(x) = -6x + 2$.

Ratkaistaan epäyhtälö $f'(x) > 0$:

$$\begin{aligned} -6x + 2 &> 0 \\ -6x &> -2 \quad | : (-6) \\ x &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Kun jaetaan tai kerrotaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

VASTAUS a) $x > 4$ b) $x < \frac{1}{3}$

ESIMERKKI 3 Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = 4x^3 - 48x$ derivaatta saa negatiivisia arvoja?

RATKAISU

1 **Derivoidaan** ensin funktio.

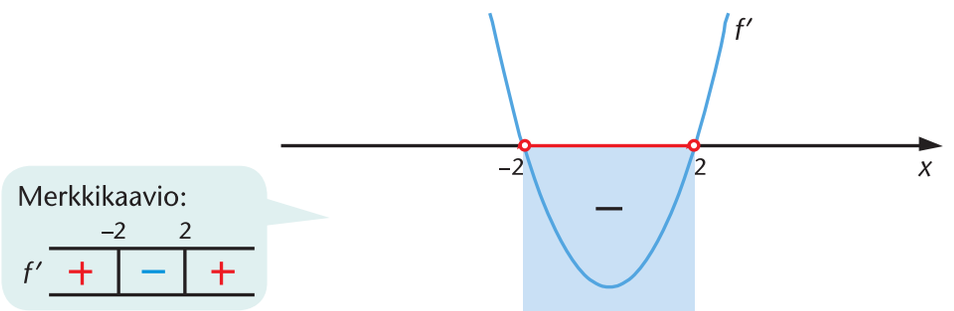
$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 48 = 12x^2 - 48$$

2 **Lasketaan** derivaatan **nollakohdat**.

$$\begin{aligned} 12x^2 - 48 &= 0 \\ 12x^2 &= 48 \quad \big| :12 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

3 **Hahmotellaan** derivaatan kuvaaja.

Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa x-akselin pisteissä $(2, 0)$ ja $(-2, 0)$.



4 **Päätellään** kuvaajan avulla **derivaatan merkki**.

Derivaatta on negatiivinen, kun derivaattafunktion kuvaaja sijaitsee x-akselin alapuolella. Tällöin x saa arvoja lukujen -2 ja 2 väliltä.

$$f'(x) < 0, \quad \text{kun } -2 < x < 2$$

VASTAUS Funktion f derivaatta saa negatiivisia arvoja, kun $-2 < x < 2$.

ESIMERKKI 4

Osoita, että funktion $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$ derivaatta ei saa koskaan negatiivisia arvoja.

RATKAISU

1 **Derivoidaan** funktio g.

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

2 **Lasketaan** derivaatan **nollakohdat** ratkaisemalla yhtälö $g'(x) = 0$.

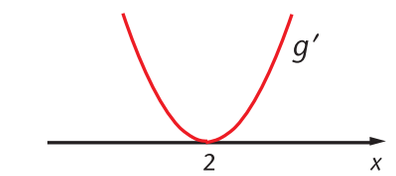
$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

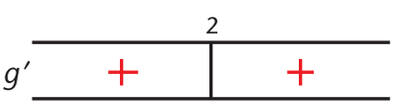
$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{6}$$

$$x = 2$$

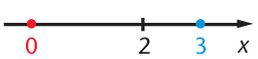
3 **Derivaatan kuvaaja** on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla on yksi nollakohta.





Kohdassa $x = 2$ derivaatta saa arvon 0, mutta kaikkialla muualla derivaatta on positiivinen eli $g'(x) \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Huomaa: Derivaatan merkkiä voidaan tutkia myös pelkän merkkikaavion avulla. Tällöin derivaatan nollakohtien ympäriltä valitaan sopivia **testiarvoja** muuttujalle x, jotka sijoitetaan derivaatan lausekkeeseen.



Valitaan testiarvo alueesta $x < 2$:

$$g'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad g' \text{ positiivinen}$$

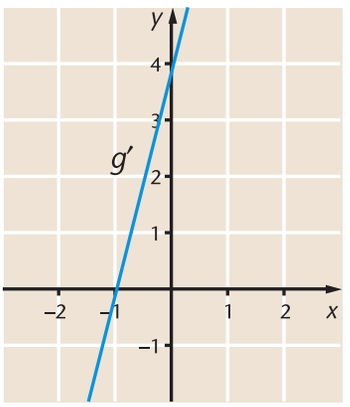
Valitaan testiarvo alueesta $x > 2$:

$$g'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 12 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad g' \text{ positiivinen}$$

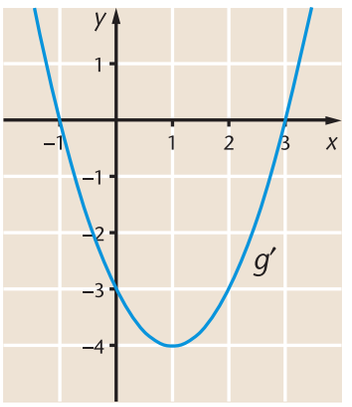
Tehtäviä

E1 134. Päättele funktion g derivaatan g' kuvaajan avulla derivaatan merkki ja laadi merkkikaavio derivaatalle.

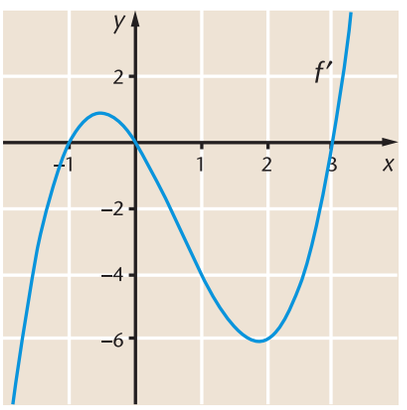
a)



b)

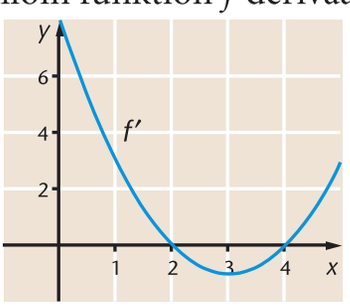


135. Laadi derivaatan merkkikaavio kuvaajan avulla ja ratkaise epäyhtälö $f'(x) < 0$.

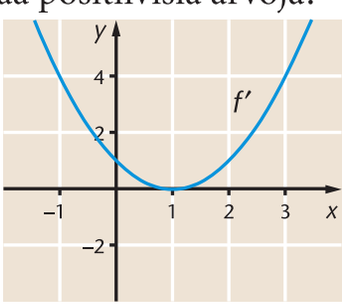


136. Milloin funktion f derivaatta saa positiivisia arvoja?

a)



b)



137. Funktion f derivaatalla on kaksi nollakohtaa, $x = -5$ ja $x = -3$. Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Laadi derivaatan merkkikaavio ja päättele, millä muuttujan x arvoilla

a) $f'(x) > 0$ b) $f'(x) < 0$.

E2 138. Ratkaise epäyhtälö $g'(x) < 0$, kun
a) $g(x) = 4x^2 - 16x$ b) $g(x) = (3 - x)(2x - 5)$.

E3 139. Milloin funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ derivaatta on positiivinen?

140. Ratkaise epäyhtälö $f'(x) > 0$, kun $f(x) = 2x^3 + 15x^2 - 36x$.

141. Ratkaise epäyhtälö $g'(x) \leq 0$, kun
a) $g(x) = -4x^2 - 24x + 12$ b) $g(x) = -x^3 + 9x^2 + 1$.

142. Millä muuttujan t arvoilla funktion $f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t$ derivaatta on positiivinen?

143. Millä muuttujan x arvoilla funktion $g(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 8$ derivaatta saa negatiivisia arvoja?

144. Millä x:n arvoilla funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$ derivaatta on positiivinen, mutta pienempi kuin 1? [K1986, 3a]

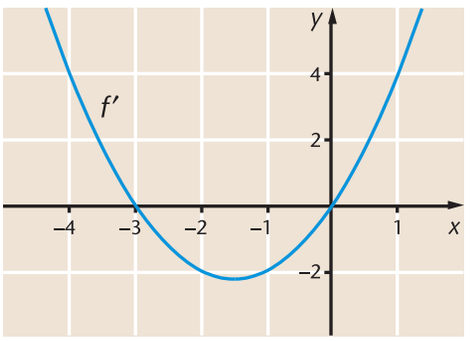
E4 145. Osoita, että funktion $g(x) = -x^3 + 18x^2 - 108x$ derivaatta ei saa positiivisia arvoja millään muuttujan x arvoilla.

146. Olkoon $f(x) = x(x^2 + 3)$. Osoita, että $f'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

147. Olkoon $g(x) = ax^2 + 5x + 1$. Määritä vakio a siten, että funktion g derivaatan nollakohta on $x = -2$. Milloin $g'(x) > 0$?

Sekalaisia tehtäviä

148. Päättele funktion f derivaatan kuvaajan avulla, milloin
a) $f'(x) > 0$ b) $f'(x) < 0$.



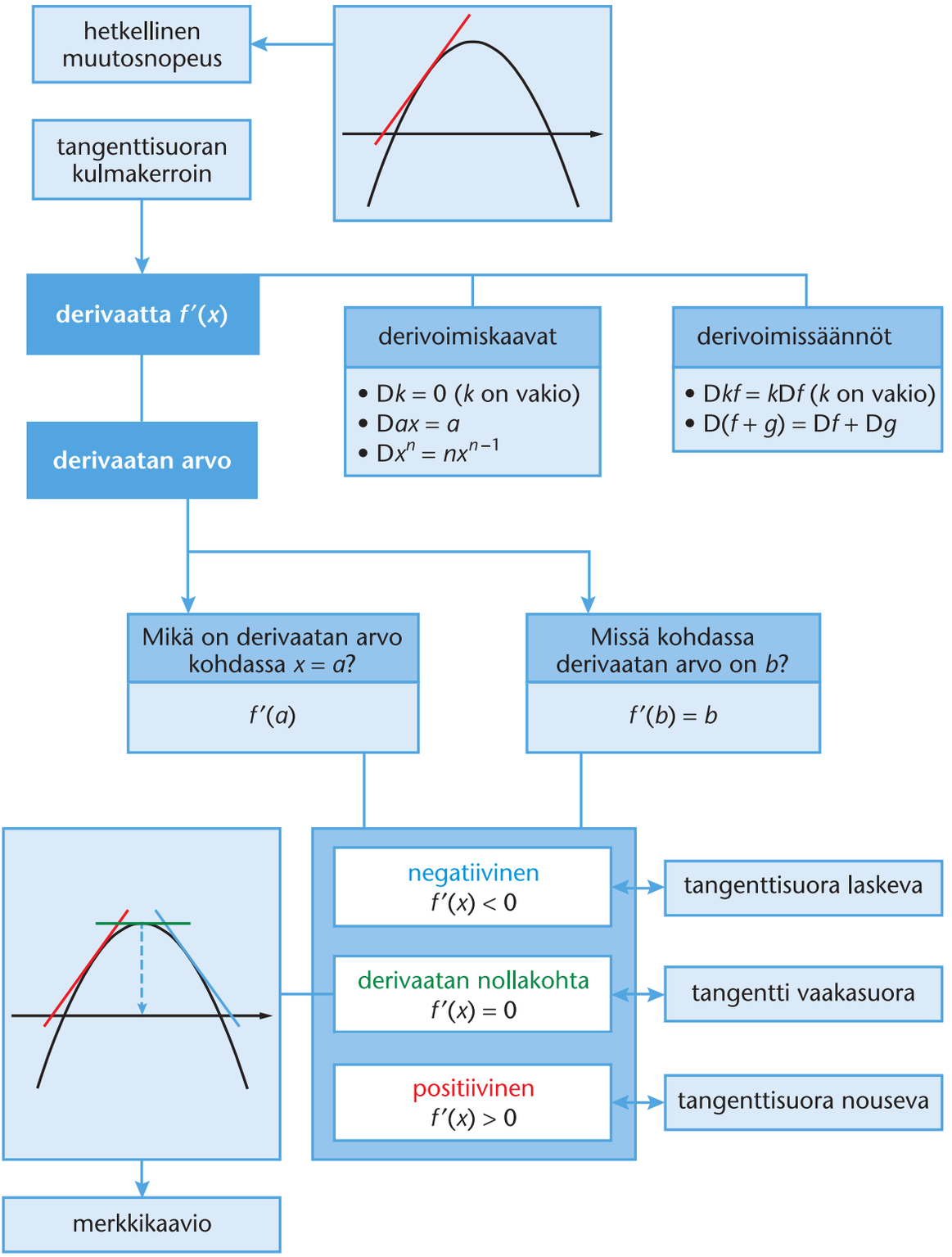
149. Millä muuttujan x arvoilla funktion $h(x) = (x+1)(x-3)$ derivaatta
a) saa arvon 5 b) on negatiivinen?

150. Ratkaise epäyhtälö $f'(x) < 0$, kun
a) $f(x) = 4x^2 + 6x - 6$ b) $f(x) = x^2 - 6x^3$.

151. Millä arvoilla x polynomin $9 + 6x - x^3$ derivaatta on positiivinen? [S1998, 4b]

152. Osoita, että funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ derivaatta on negatiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla.

Keskeisiä käsitteitä



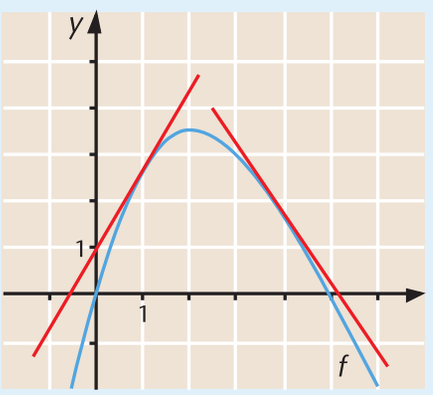
3 Funktion analysoiminen derivaatan avulla

3.1 Funktion kulku

POHDINTA 1

Tutki funktion f kuvaajaa ja vastaa kysymyksiin. Perustele vastauksesi.

a) Mitkä ovat funktion nollakohdat?
b) Mitkä ovat funktion derivaatan nollakohdat?
c) Milloin kuvaajalle piirretyt tangenttisuorat ovat nousevia, milloin laskevia?
d) Milloin funktion f derivaatta on negatiivinen, milloin positiivinen?

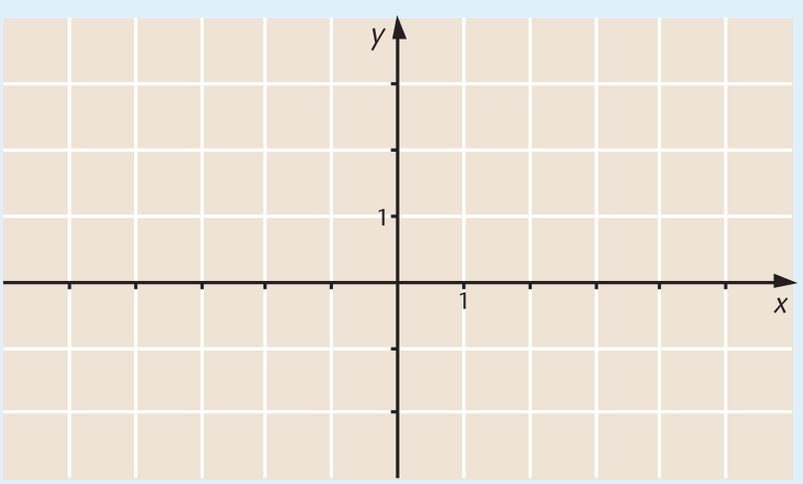


POHDINTA 2

Funktiosta g tiedetään, että

- funktiolla on kolme nollakohtaa: $x = -3$, $x = 0$ ja $x = 2$
- funktion derivaatalla on kaksi nollakohtaa: $x = -1$ ja $x = 1$
- funktion arvot derivaatan nollakohdissa ovat $g(-1) = -2$ ja $g(1) = 3$.

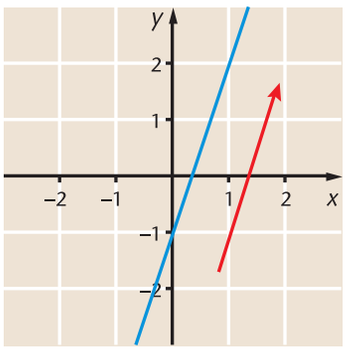
Hahmottele näiden tietojen perusteella funktion g kuvaaja.



Päättele kuvaajan perusteella, milloin funktion derivaatta on negatiivinen, milloin positiivinen.

Matemaattisessa analyysissa tutkitaan funktioiden ominaisuuksia. Yksi näistä on **monotonisuus**, jolla tarkoitetaan funktion **kasvamista** ja **vähenemistä**.

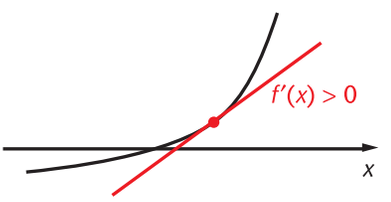
Funktion $f(x) = 2x - 1$ kuvaaja on nouseva suora. Kun muuttujan x arvot kasvavat, myös funktion saamat arvot kasvavat.



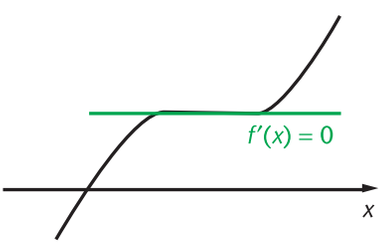
Luettaessa funktion kuvaajaa vasemmalta oikealle, kuvaaja kulkee ylöspäin.

Jos funktion arvot kasvavat muuttujan arvojen kasvaessa, funktiota sanotaan **kasvavaksi**. Esimerkin funktio f on kasvava kaikilla muuttujan x arvoilla.

Kasvavan funktion kuvaajalle piirretty tangentti on nouseva suora. Koska tangentin kulmakerroin on positiivinen, myös funktion derivaatta on positiivinen.



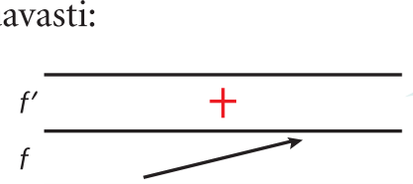
Vaikka funktio on kasvava, on sovittu, että sen arvot voivat määrätyllä välillä pysyä samana. Tällä välillä funktion derivaatta saa arvon nolla. Funktio on siis kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.



Derivaatan merkki ja funktion **kulkusuunta** voidaan esittää merkki- ja kulkukaavion avulla. Kaaviolla tarkoitetaan taulukkoa, johon on koottu

- derivaatan merkki (+/−)
- funktion kulkusuunta (kasvava/vähenevä) nuolella merkittynä.

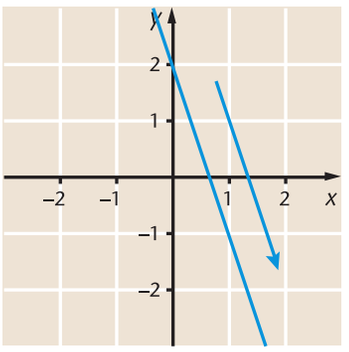
Funktion $f(x) = 2x - 1$ merkki- ja kulkukaavio voidaan esittää seuraavasti:



$f'(x) = 2 > 0$

Yläviistoon oikealle osoittava nuoli kuvaa funktion kasvamista.

Funktion $g(x) = -3x + 2$ kuvaaja on laskeva suora. Kun muuttujan arvot suurenevat, funktio g saa koko ajan pienempiä arvoja.

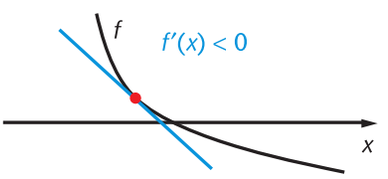


Luettaessa funktion kuvaajaa vasemmalta oikealle, kuvaaja kulkee alaspäin.

Jos funktion arvot pienenevät muuttujan arvojen kasvaessa, funktiota sanotaan **väheneväksi**. Funktio g on vähenevä kaikilla muuttujan x arvoilla.

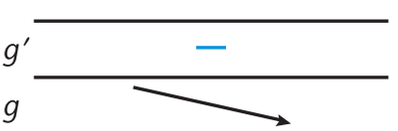
Myös vähenevän funktion arvot voivat pysyä määrätyllä välillä samana. Tällöin derivaatta saa negatiivisia arvoja tai määrätyllä välillä arvon nolla.

Vähenevän funktion kuvaajalle piirretty tangentti on taas laskeva suora. Tangentin kulmakerroin on negatiivinen, joten funktion derivaatta on negatiivinen.



Derivaatan merkki kertoo siis funktion kulkusuunnan.

Vähenevän funktion $g(x) = -3x + 2$ merkki- ja kulkukaavio voidaan esittää seuraavasti:



$g'(x) = -3 < 0$

Alaviistoon oikealle osoittava nuoli kuvaa funktion vähenemistä.

Aidosti monotoniset funktiot s. 148

MONOTONISUUS

Kasvava funktio

- Jos funktion arvot kasvavat (tai pysyvät samana) muuttujan (x) arvojen kasvaessa, funktio on kasvava.
- $f'(x) \geq 0$

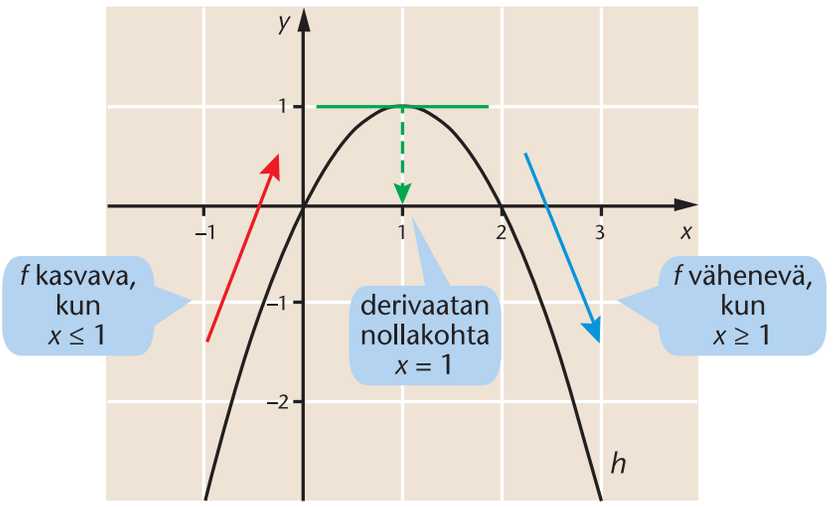
Vähenevä funktio

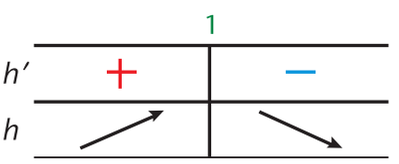
- Jos funktion arvot pienenevät (tai pysyvät samana) muuttujan (x) arvojen kasvaessa, funktio on vähenevä.
- $f'(x) \leq 0$

$f'(x) = -2x + 2$
$f'(x) = 0$, kun
$-2x + 2 = 0$
$x = 1$

Useilla funktioilla kulkusuunta vaihtuu. Funktio voi olla jollain välillä kasvava, mutta toisella välillä vähenevä. Funktion $h(x) = -x^2 + 2x$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jolla on derivaatan nollakohtana $x = 1$.

- Välillä $]-\infty, 1]$ funktion h arvot kasvavat muuttujan arvojen kasvaessa. Funktio h on siis kasvava, kun $x \leq 1$.
- Välillä $[1, \infty[$ funktion h arvot pienenevät, kun muuttujan arvot kasvavat. Funktio h on siis vähenevä, kun $x \geq 1$.





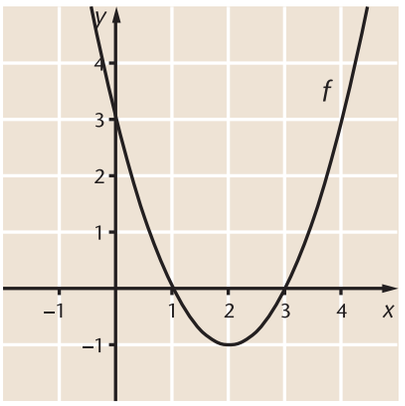
Kohdassa, jossa kulkusuunta vaihtuu, derivaatta saa arvon nolla. Merkki- ja kulkukaavioon merkitään tästä syystä aina kaikki derivaatan nollakohdat Tällaisia kohtia ovat esimerkiksi paraabelin huippukohdat. Huipun kohdalla tangenttisuora on vaakasuora.

Kun tutkitaan funktion kulkusuuntaa:

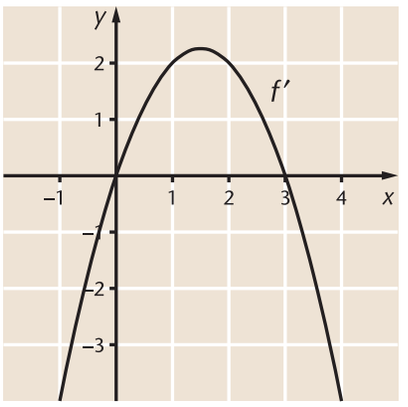
1. **Derivoidaan** funktio.
2. Määritetään **derivaatan nollakohdat**.
3. Tehdään **merkki- ja kulkukaavio**.
   - Päätellään derivaatan merkki (+/–).
   - Päätellään funktion kulku (↗ / ↘).

ESIMERKKI 1 Päättele kuvaajan perusteella, milloin funktio f on kasvava, kun kuvaaja esittää

a) funktiota f

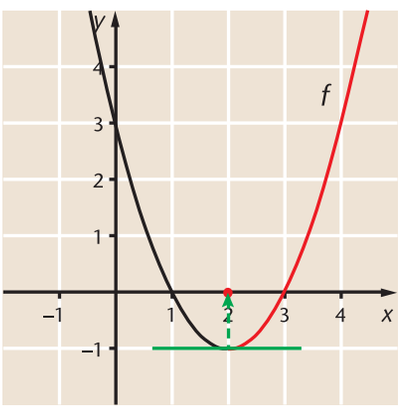


b) funktion f derivaattaa f'.



RATKAISU

a) Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huipun x-koordinaatti on 2. Tällöin derivaatan nollakohta on myös $x = 2$.

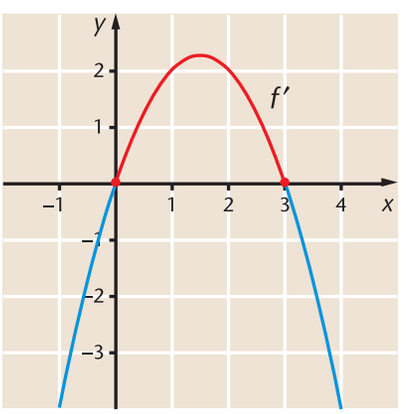


Kun $x \geq 2$, funktion arvot kasvavat, kun muuttujan arvot kasvavat. Funktio on siis kasvava välillä $[2, \infty[$.

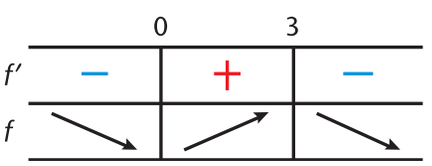
b) Derivaatalla f' on kaksi nollakohtaa, $x = 0$ ja $x = 3$.

Kun $0 < x < 3$, derivaatan kuvaaja on x-akselin yläpuolella eli $f'(x) > 0$.

Kun $x > 3$ tai $x < 0$, kuvaaja on x-akselin alapuolella eli $f'(x) < 0$.



Laaditaan kuvaajan avulla merkki- ja kulkukaavio:



Funktio on kasvava, kun derivaatta on positiivinen tai nolla, eli välillä $[0, 3]$.

VASTAUS a) f on kasvava, kun $x \geq 2$. b) f on kasvava, kun $0 \leq x \leq 3$.

ESIMERKKI 2 Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$ on vähenevä?

RATKAISU Funktio on vähenevä, kun derivaatta saa negatiivisia arvoja.

1 Määritetään ensin funktion f derivaatta:

$$f'(x) = 4x - 6$$

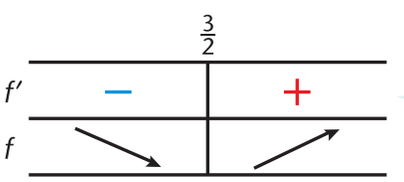
2 Lasketaan derivaatan nollakohdat ratkaisemalla yhtälö $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 4x - 6 &= 0 \\ 4x &= 6 \quad | : 4 \\ x &= \overset{2)}{\frac{6}{4}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

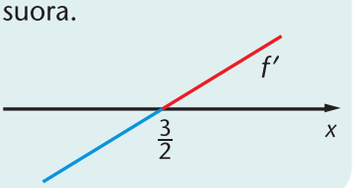
3 Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

Derivaatan merkin selvittämiseksi lasketaan derivaatalle testiarvot muuttujan arvon $x = \frac{3}{2}$ molemmilta puolilta.

Väli $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$	Väli $\left[\frac{3}{2}, \infty\right[$
$f'(0) = 4 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$	$f'(2) = 4 \cdot 2 - 6 = 2 > 0$
derivaatta on negatiivinen	derivaatta on positiivinen



Testiarvojen sijaan voi hahmotella derivaatan kuvaajan ja päätellä merkin siitä. Kuvaaja on nouseva suora.



Kun muuttuja x saa arvoja väliltä $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ eli $x \leq \frac{3}{2}$, funktio f on vähenevä.

VASTAUS f on vähenevä, kun $x \leq \frac{3}{2}$.

ESIMERKKI 3

Milloin funktio g on kasvava ja milloin vähenevä?

a) $g(x) = -2x^3 - 6x^2$ b) $g(x) = x^3 + 4x$

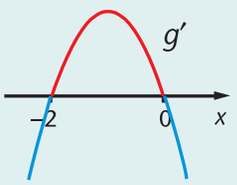
RATKAISU

a) Funktion g derivaatta on $g'(x) = -6x^2 - 12x$.

Lasketaan derivaatan nollakohdat erottamalla yhteiseksi tekijäksi x ja käyttämällä tulon nollasääntöä.

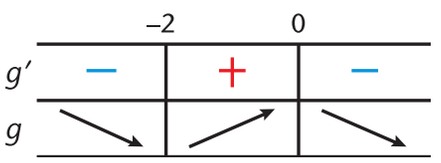
$$-6x^2 - 12x = 0$$
$$x(-6x - 12) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -6x - 12 = 0$$
$$-6x = 12 \quad | : (-6)$$
$$x = -2$$

Testiarvojen sijaan voi hahmotella derivaatan kuvaajan.



Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Määritetään derivaatan merkki kolmella testiarvolla.

- $g'(-3) = -6 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) = -18 < 0$ g' negatiivinen
- $g'(-1) = -6 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) = 6 > 0$ g' positiivinen
- $g'(1) = -6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -18 < 0$ g' negatiivinen



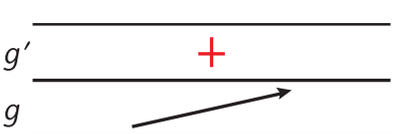
Funktio g on kasvava, kun $-2 \le x \le 0$, ja vähenevä, kun $x \le -2$ tai $x \ge 0$.

b) Funktion g derivaatta on $g'(x) = 3x^2 + 4$. Ratkaistaan yhtälö $g'(x) = 0$.

$$3x^2 + 4 = 0$$
$$3x^2 = -4 \quad | : 3$$
$$x^2 = -\frac{4}{3}$$

Koska negatiivisesta luvusta ei voi ottaa neliöjuurta, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Derivaatalla ei ole nollakohtia. Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka saa vain positiivisia arvoja. Tämä voidaan todeta myös valitsemalla mikä tahansa luku testiarvoksi:



$$g'(0) = 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 > 0$$

Funktio g on siis kasvava kaikilla muuttujan x arvoilla.

VASTAUS

a) g on kasvava, kun $-2 \le x \le 0$, ja vähenevä, kun $x \le -2$ tai $x \ge 0$.
b) g on kasvava kaikilla muuttujan x arvoilla.

ESIMERKKI 4

Petteri myy kirpputorilla vanhoja vaatteitaan kappalehintaan x €/vaate. Petterin saamat myyntitulot riippuvat kappalehinnasta funktion $m(x) = -3{,}7x^2 + 18{,}5x - 0{,}8$ mukaan. Milloin myyntitulot kasvavat ja mihin kappalehintaan vaatteet kannattaa myydä?

RATKAISU

Funktion m derivaatta on $m'(x) = -7{,}4x + 18{,}5$.

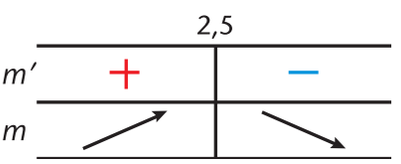
Lasketaan derivaatan nollakohdat ratkaisemalla yhtälö $m'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -7{,}4x + 18{,}5 &= 0 \\ -7{,}4x &= -18{,}5 \quad \big| : (-7{,}4) \\ x &= 2{,}5 \end{aligned}$$

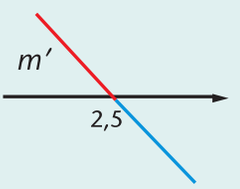
Muodostetaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Määritetään derivaatan merkki valitsemalla testiarvoiksi $x = 1$ ja $x = 3$ (arvot derivaatan nollakohdan molemmilta puolilta).

- $m'(1) = -7{,}4 \cdot 1 + 18{,}5 = 11{,}1 > 0$ — m' positiivinen
- $m'(3) = -7{,}4 \cdot 3 + 18{,}5 = -3{,}7 < 0$ — m' negatiivinen

Merkki- ja kulkukaavio:



Testiarvojen sijaan voi hahmotella derivaatan kuvaajan.



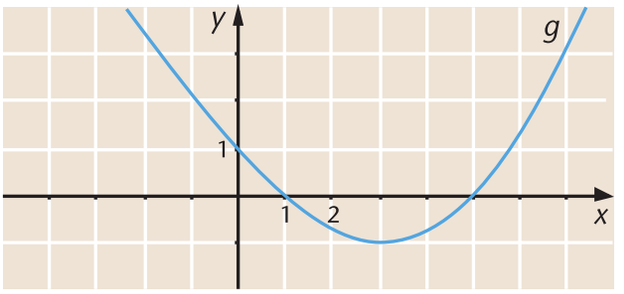
Kaaviosta nähdään, että myyntituloa esittävä funktio kasvaa, kun $x \leq 2{,}5$. Myyntitulot siis kasvavat, kun myyntihinta on pienempi tai yhtä suuri kuin 2,5 €/vaate, ja myyntitulot ovat suurimmillaan, kun vaatteet myydään hintaan 2,5 €/vaate. Tämän jälkeen myyntitulo alkaa laskea.

VASTAUS

Myyntitulot kasvavat, kun myyntihinta on enintään 2,5 €/vaate. Vaatteet kannattaa myydä hintaan 2,5 €/vaate.

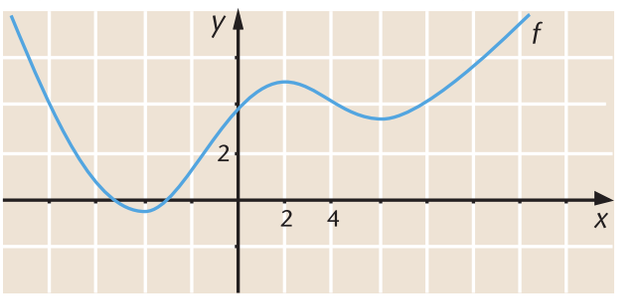
Tehtäviä

153. Päättele funktion g kuvaajan avulla, milloin g on kasvava ja milloin vähenevä.



154. Ilmoita, millä välillä

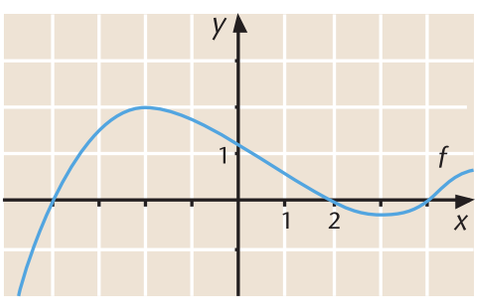
a) $f'(x) \leq 0$ b) $f'(x) > 0$.



155. Kuvassa on esitetty funktion f kuvaaja välillä $[-5, 5]$. Päättele kuvaajan avulla, millä muuttujan arvoilla f on mainitulla välillä

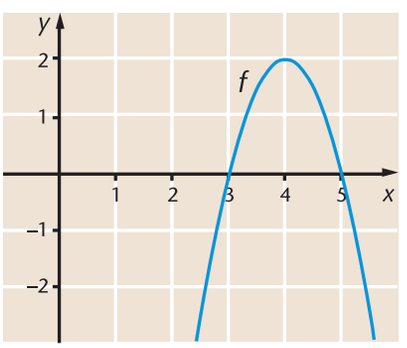
a) kasvava

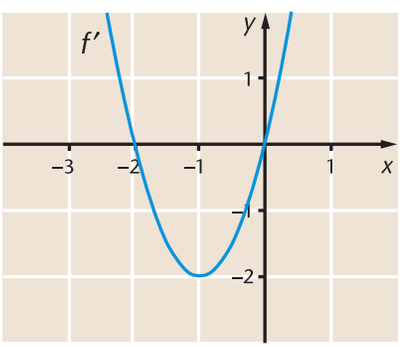
b) vähenevä.



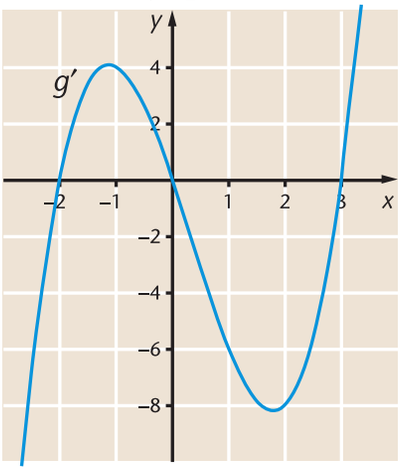
E1 156. Päättele kuvaajan perusteella, milloin funktio f on vähenevä, kun kuvaaja esittää

a) funktiota f b) funktion f derivaattaa f'.





157. Määritä funktion g derivaatan nollakohdat. Laadi merkki- ja kulkukaavio ja päättele, millä muuttujan arvoilla g on kasvava.



E2 158. Millä muuttujan x arvoilla funktio g on vähenevä?

a) $g(x) = x^2 - 3x - 4$ b) $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + 7$

159. Millä muuttujan x arvoilla funktio f on kasvava?

a) $f(x) = x^2 + x - 6$ b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$

160. Milloin funktio $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 5$ on kasvava?

161. Tutki, milloin funktio $g(x) = 4x^3 - 6x^2 - 504x + 3$ on kasvava ja milloin vähenevä.

E3 162. Milloin funktio g on kasvava ja milloin vähenevä?

a) $g(x) = -x^3 - \frac{27}{2}x^2$ b) $g(x) = -x^3 - 6x^2 - 13x + 1$

163. Piirrä kaksi erilaista funktion h kuvaajaa, joissa

a) $h'(x) > 0$, kun $x < 1$

b) $h'(x) = 0$, kun $x = 1$ ja $h(1) = 2$

c) $h'(x) < 0$, kun $x > 1$.

164. Tutki funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ kasvamista ja vähenemistä derivaatan avulla. Piirrä kulkukaavion ja muutamien pisteiden avulla funktion kuvaaja.

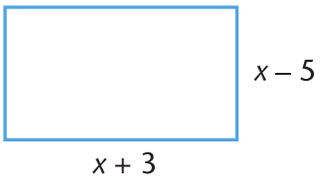
Funktion kuvaajan piirtäminen derivaatan avulla s. 150

E3 165. Bakteerikannan kasvua bakteeriviljelmässä kuvaa funktio $f(x) = -6x^3 + 3x^2 + 4x + 1000$, jossa x on tuntien määrä viljelyn aloitushetkestä lukien.

a) Kuinka monta bakteeria viljelmässä oli aloitushetkellä?

b) Milloin bakteerikanta alkoi vähentyä?

166. a) Muodosta funktio, joka kuvaa suorakulmion pinta-alaa A.
b) Millä muuttujan x arvolla pinta-alafunktio on kasvava?



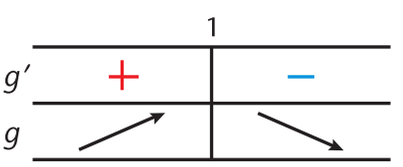
167. Jaanan juoksulenkkiä mäkisessä maastossa esittää funktio $h(x) = -3x^4 + 12x^3 - 5x^2$. Maaston korkeus metreinä on h ja vaakasuora etäisyys kilometreinä juoksulenkin lähtökohdasta on x, $x \in [0, 2]$. Missä kohtaa lenkkiä on ylämäkeä?

168. Golfpallon lentoradan korkeutta maanpinnasta kuvaa funktio $h(x) = -0{,}8x^2 + 75{,}2x$, jossa x on pallon vaakasuora etäisyys lyöntipisteestä metreinä.
a) Kuinka pitkä lyönti on?
b) Milloin pallo on laskevassa liikkeessä?

169. Määritä vakio a siten, että funktio $f(x) = (2a - 6)x + 3$ on kasvava kaikilla muuttujan x arvoilla.

170. Määritä vakio a siten, että funktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (3 + a)x$ on kasvava kaikilla muuttujan x arvoilla.

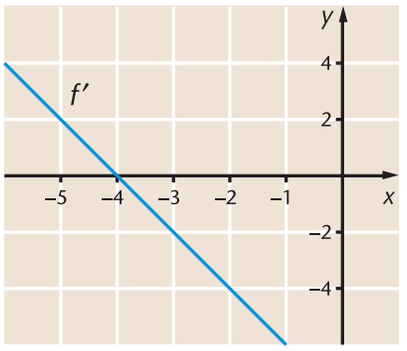
171. Päättele merkki- ja kulkukaavion avulla, kumpi arvoista $g(1{,}000\,001)$ ja $g(1{,}000\,002)$ on suurempi.



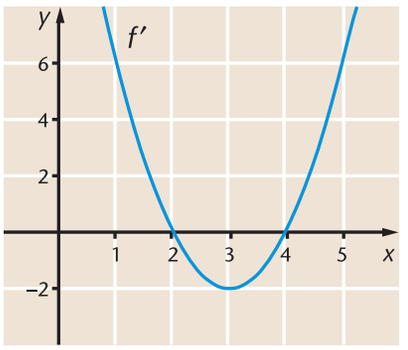
Sekalaisia tehtäviä

172. Milloin f on kasvava ja milloin vähenevä, kun kuvassa on derivaatan f' kuvaaja?

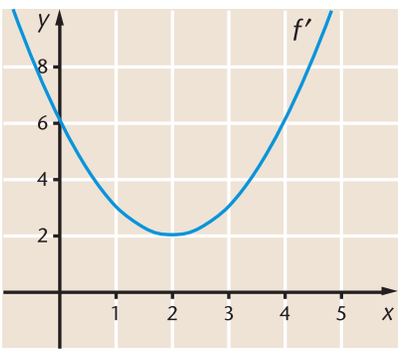
a)



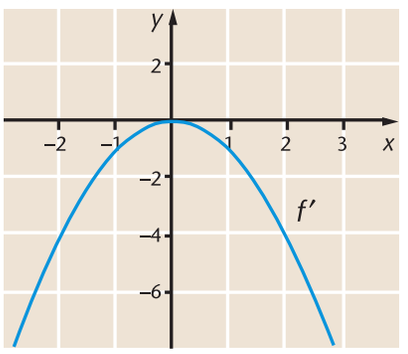
b)



c)



d)



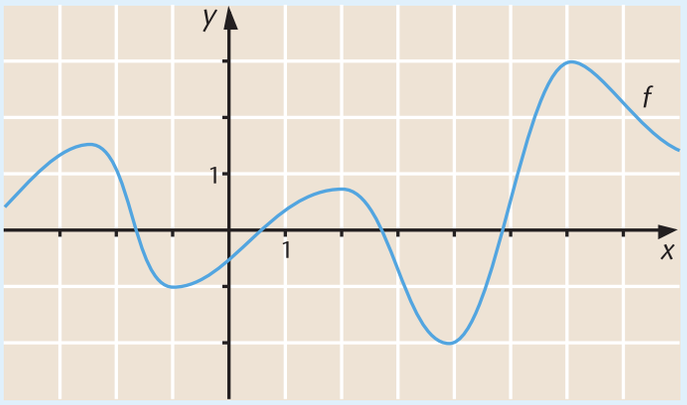
173. Millä välillä funktio $g(x) = 2x^2 + 24x + 60$ on
a) kasvava b) vähenevä?

174. Milloin funktio $h(x) = 6x^3 - 13x^2 + 8x + 2$ on kasvava?

175. Tutki, milloin funktio $f(x) = 7x^3 + x^2 - 40x + 36$ on kasvava ja milloin vähenevä. Piirrä funktion kuvaaja. [K1999, 5a]

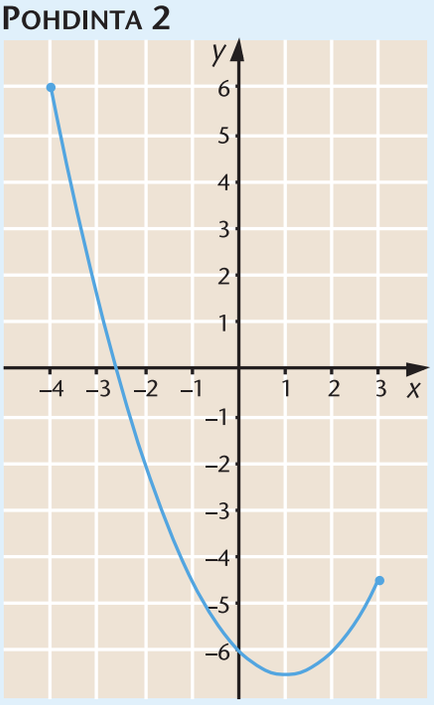
3.2 Funktion ääriarvot

POHDINTA 1 Tarkastele funktion f kuvaajaa ja vastaa kysymyksiin.



a) Missä kohdassa kuvaaja käy ”korkeimmalla”? Mikä on funktion arvo tässä kohdassa?
b) Sanotaan, että kohdassa $x = 2$ funktio saa suurimman arvonsa kohdan $x = 2$ lähiympäristössä. Etsi muita vastaavia kohtia funktion kuvaajalta. Mitä ”lähiympäristössä” mielestäsi tarkoittaa?
c) Kohdassa $x = -1$ funktio saa pienimmän arvonsa kohdan $x = -1$ lähiympäristössä. Etsi muita vastaavia kohtia kuvaajalta.
d) Tutki funktion derivaattaa b- ja c-tehtävissä tarkastelluissa kohdissa. Mitä huomaat?

POHDINTA 2



Määritellään funktio $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 6$ siten, että muuttuja x voi saada arvoja vain väliltä $[-4, 3]$. Käytä kuvaa apuna, kun vastaat kysymyksiin.

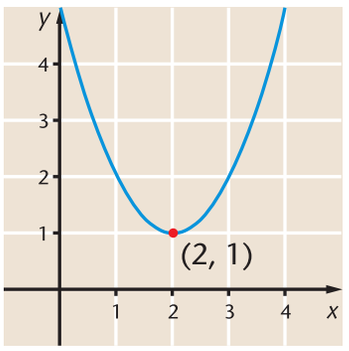
a) Laske $f(-4)$ ja $f(3)$. Määritä lisäksi derivaatan nollakohdat. Mitä arvoja funktio saa derivaatan nollakohdissa?
b) Mikä on funktion arvoista **suurin**? Missä kohdassa se saadaan?
c) Mikä on funktion arvoista **pienin**? Missä kohdassa se saadaan?

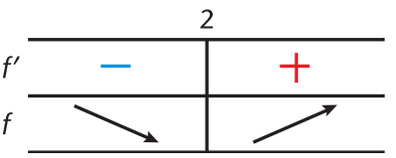
Paikalliset eli lokaalit ääriarvot

$f'(x) = 2x - 4$
$f'(x) = 0$, kun
$2x - 4 = 0$
$x = 2$
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$
Siis huippupiste on (2, 1).

Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippupiste on (2, 1). Derivaatan nollakohdassa $x = 2$ funktion kulkusuunta muuttuu.

- Kun $x \leq 2$, derivaatta saa negatiivisia arvoja eli funktio on vähenevä.
- Kun $x \geq 2$, derivaatta saa positiivisia arvoja eli funktio on kasvava.

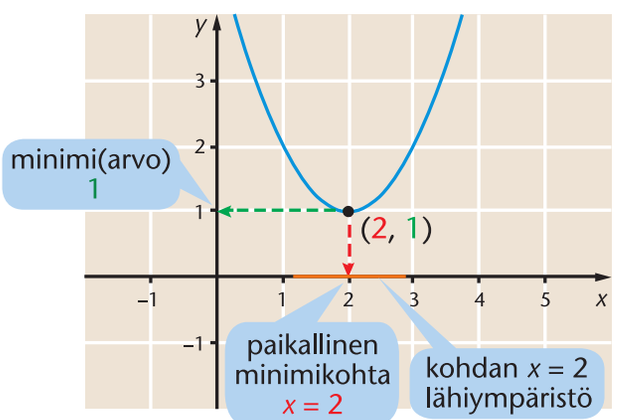




Kohtaa, jossa funktion kulkusuunta vaihtuu, sanotaan **ääriarvokohdaksi** ja funktion arvoa tässä kohdassa sanotaan **ääriarvoksi**.

- Funktiolle f kohta $x = 2$ on ääriarvokohta.
- Funktiolla f on ääriarvo 1, koska $f(2) = 1$.

Kohdalla $x = 2$ on erityisasema **lähiympäristössään**: funktion arvo $f(2) = 1$ on tässä ympäristössä funktion saamista arvoista pienin. Siksi ääriarvokohtaa $x = 2$ sanotaan **paikalliseksi minimikohdaksi** ja ääriarvoa $f(2) = 1$ **paikalliseksi minimiarvoksi (minimiksi)**.

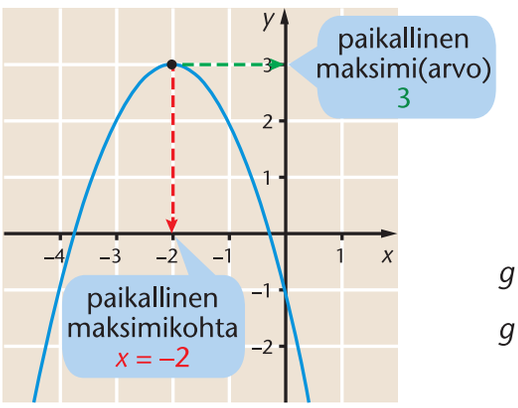


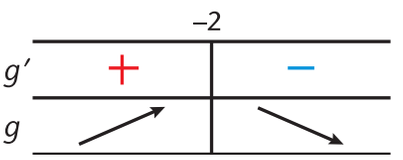
$f'(x) = -2x - 4$
$f'(x) = 0$, kun
$-2x - 4 = 0$
$x = -2$
$f(-2) = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 1 = 3$
Siis huippupiste on $(-2, 3)$.

Funktion $g(x) = -x^2 - 4x - 1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippupiste on $(-2, 3)$. Kohdassa $x = -2$ derivaatta saa arvon nolla ja funktion g kulkusuunta vaihtuu:

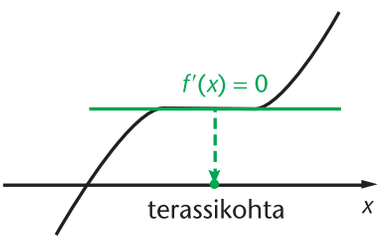
- Kun $x \leq -2$, funktio on kasvava.
- Kun $x \geq -2$, funktio on vähenevä.

Kohdassa $x = -2$ funktiolla g on siis ääriarvo. Koska $g(-2) = 3$ on lähiympäristössään funktion arvoista suurin, sitä sanotaan **paikalliseksi maksimiarvoksi** (**maksimiksi**) ja kohtaa $x = -2$ **paikalliseksi maksimikohdaksi**.

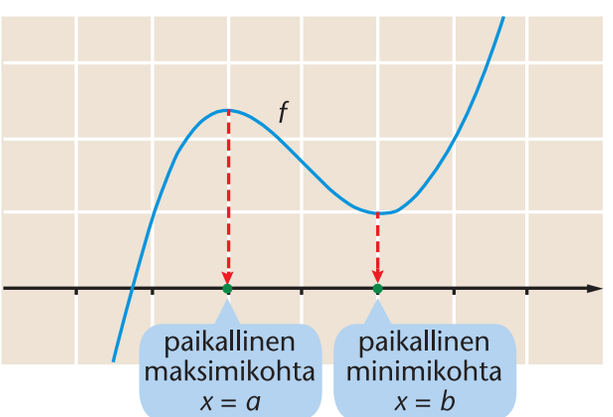


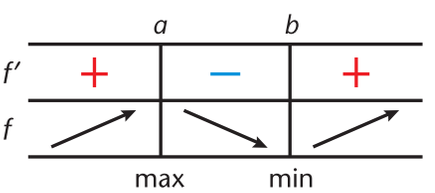


Ääriarvokohdat löydetään derivaatan avulla. Ne ovat sellaisia derivaatan nollakohtia, joissa funktion kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi tai päinvastoin. Eräillä funktioilla derivaatan nollakohta on **terassikohta**, jossa funktion kulkusuunta ei vaihdu. Terassikohdassa funktiolla ei ole siis ääriarvoa.



Funktiolla voi olla useita erilaisia ääriarvoja. Ääriarvojen luonne (maksimi vai minimi) voidaan merkitä merkki- ja kulkukaavioon.

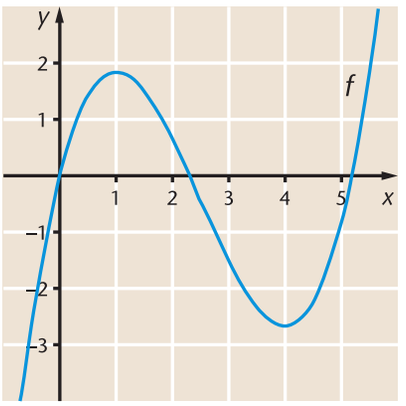


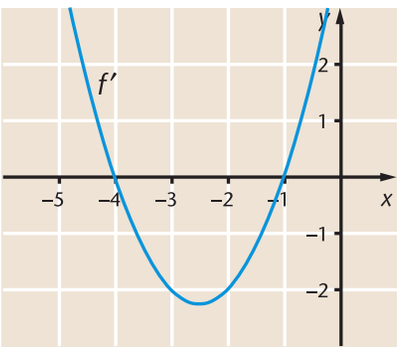


ESIMERKKI 1

Määritä kuvaajan avulla funktion f ääriarvokohdat ja niiden luonne, kun kuvaaja esittää

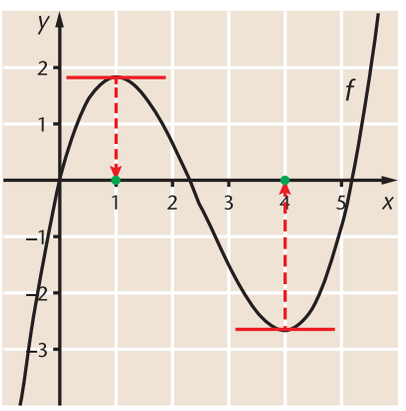
a) funktiota f b) derivaattaa f'.

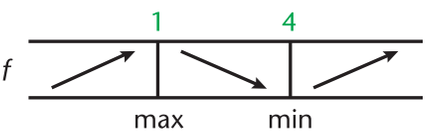




RATKAISU

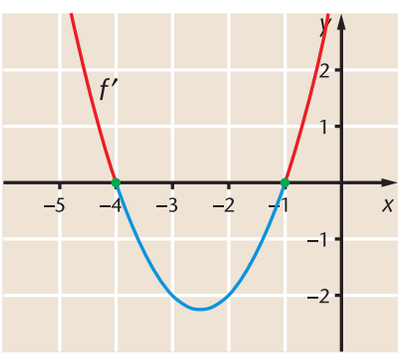
a) Funktion f derivaatalla on kaksi nollakohtaa, $x = 1$ ja $x = 4$. Laaditaan funktion kulkukaavio, josta havaitaan ääriarvojen luonne.

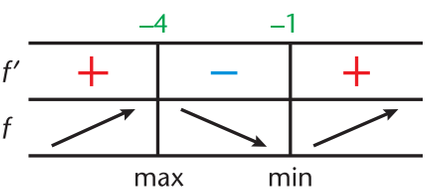




Kohdassa $x = 1$ funktiolla on maksimi, koska kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohdassa $x = 4$ funktiolla on minimi, koska kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi.

b) Derivaatalla on kaksi nollakohtaa, $x = -4$ ja $x = -1$. Laaditaan kuvaajan avulla merkki- ja kulkukaavio.





Kulkukaavion avulla voidaan päätellä, että funktiolla on maksimi kohdassa $x = -4$ ja minimi kohdassa $x = -1$.

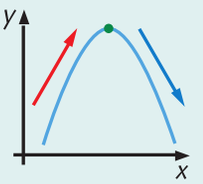
VASTAUS

a) maksimikohta $x = 1$ ja minimikohta $x = 4$
b) maksimikohta $x = -4$ ja minimikohta $x = -1$

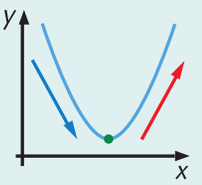
Ääriarvokohtia ja ääriarvoja ei yleensä saa katsoa kuvaajasta, vaan ne on ratkaistava. Polynomifunktioilla mahdolliset ääriarvot sijaitsevat derivaatan nollakohdissa.

Paikalliset ääriarvot

- Derivaatan nollakohdassa funktiolla on **paikallinen maksimi**, jos funktion kulkusuunta vaihtuu siinä kasvavasta väheneväksi.



- Derivaatan nollakohdassa funktiolla on **paikallinen minimi**, jos funktion kulkusuunta vaihtuu siinä vähenevästä kasvavaksi.



Kun etsitään polynomifunktion paikallisia ääriarvoja, tutkitaan funktion derivaattaa. Derivaatan nollakohtien ja merkin avulla laaditaan funktion kulkukaavio. Kulkukaaviosta voidaan päätellä mahdollisten ääriarvojen luonne.

Kun määritetään funktion ääriarvoja:

1. **derivoidaan** funktio
2. lasketaan **derivaatan nollakohdat**
3. laaditaan merkki- ja kulkukaavio
4. päätellään kulkukaavion avulla **ääriarvokohdat** ja **niiden luonne** sekä lasketaan ääriarvot.

Huomaa: Jos funktiosta tunnetaan vain sen derivaatan kuvaaja, ääriarvoja ei voida sen avulla määrittää. Derivaatan kuvaaja paljastaa vain ääriarvokohdat ja derivaatan merkin.

Derivaatan avulla voidaan ratkaista vain ääriarvokohdat. Jos halutaan tietää funktion ääriarvo kyseisessä kohdassa, on käytettävä itse funktiota: ääriarvokohta eli muuttujan arvo sijoitetaan funktion lausekkeeseen, jolloin saadaan ääriarvokohtaa vastaava funktion arvo eli ääriarvo.

ESIMERKKI 2 Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 144x + 10$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

RATKAISU Ääriarvokohdat saadaan selville tutkimalla funktion kulkua derivaatan avulla.

1 Derivoidaan funktio f.

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 15 \cdot 2x - 144 = 6x^2 - 30x - 144$$

2 Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$6x^2 - 30x - 144 = 0$$

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-144)}}{2 \cdot 6}$$

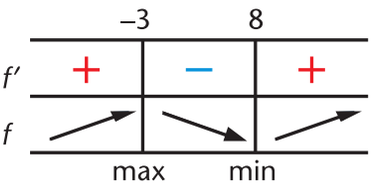
$$x = \frac{30 \pm \sqrt{4356}}{12}$$

$$x = \frac{30 \pm 66}{12}$$

$$x = 8 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

3 Laaditaan funktion kulkukaavio derivaatan merkkikaavion avulla. Merkitään merkkikaavioon derivaatan nollakohdat. Valitaan näiden perusteella testiarvoiksi $x = -4$, $x = 0$ ja $x = 10$.

- $f'(-4) = 72 > 0$
- $f'(0) = -144 < 0$
- $f'(10) = 156 > 0$



4 Päätellään ääriarvokohdat ja lasketaan ääriarvot. Funktiolla f maksimi kohdassa $x = -3$.

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 15 \cdot (-3)^2 - 144 \cdot (-3) + 10 = 253$$

Funktiolla f minimi kohdassa $x = 8$.

$$f(8) = 2 \cdot 8^3 - 15 \cdot 8^2 - 144 \cdot 8 + 10 = -1078$$

VASTAUS maksimi $f(-3) = 253$, minimi $f(8) = -1078$

ESIMERKKI 3

Funktio T mallintaa influenssan leviämistä kaupungissa. Kun epidemian alkamisesta oli kulunut x viikkoa, tautia potevien määrä oli

$$T(x) = -160x^2 + 2080x$$

a) Kuinka kauan epidemia kestää?
b) Milloin sairaiden määrä oli suurimmillaan?
c) Kuinka moni oli tällöin sairaana?

RATKAISU

a) Epidemian kesto saadaan ratkaisemalla funktion T nollakohdat, koska alussa ja lopussa sairaita ei ole lainkaan.

$$-160x^2 + 2080x = 0$$
$$x(-160x + 2080) = 0$$

Yhtälön voi ratkaista myös ratkaisukaavalla.

Tulon nollasäännön mukaan

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -160x + 2080 = 0$$
$$-160x = -2080 \quad | : (-160)$$
$$x = 13$$

Aika vaihtelee siis välillä $[0, 13]$.

b) Etsitään funktion T suurin arvo välillä $[0, 13]$.

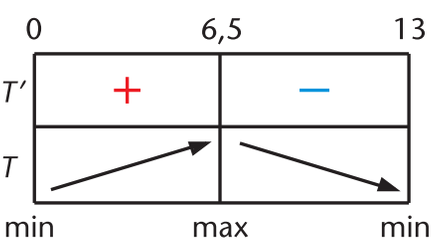
Derivoidaan ensin funktio.

$$T'(x) = -160 \cdot 2x + 2080 = -320x + 2080$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$-320x + 2080 = 0$$
$$-320x = -2080 \quad | : (-320)$$
$$x = 6{,}5$$

Tarkastellaan funktion T kulkua merkkikaavion avulla.



$T'(1) = -320 \cdot 1 + 2080 = 1760$
$T'(10) = -320 \cdot 10 + 2080 = -1120$

c) T:n suurin arvo saadaan kohdassa $x = 6{,}5$, jolloin sairaita oli

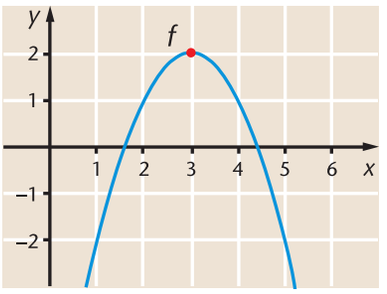
$$T(6{,}5) = -160 \cdot 6{,}5^2 + 2080 \cdot 6{,}5 = 6760$$

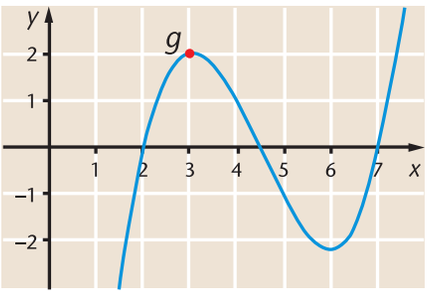
VASTAUS

a) 13 viikkoa b) 6,5 viikon kuluttua epidemian alkamisesta
c) 6760 henkilöä

Funktion suurin ja pienin arvo

Molemmilla kuvien funktioilla f ja g on maksimi kohdassa $x = 3$.





Nämä ääriarvot ovat kuitenkin erilaisia:

- Funktion f paikallinen maksimi $f(3) = 2$ on suurin arvo, jonka f saa.
- Funktion g maksimi $g(3) = 2$ on suurin arvo vain lähiympäristössään. Funktio g saa kuitenkin suurempia arvoja kuin 2, koska sen kuvaaja on kasvava, kun $x \geq 6$.

Suurinta arvoa kutsutaan myös **globaaliksi maksimiksi**. Funktiolla f on globaali maksimi eli suurin arvo kohdassa $x = 3$.

Funktiolla g ei ole suurinta arvoa, ainoastaan paikallinen maksimi kohdassa $x = 3$.

Kummallakaan funktiolla ei ole **globaalia minimiä** eli **pienintä arvoa**, vaikka funktiolla g onkin paikallinen minimi kohdassa $x = 6$.

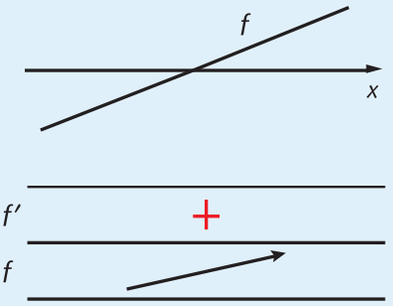
Yhtälön likimääräinen ratkaiseminen s. 152

Jos funktio saa arvoja koko reaalilukujen joukossa, sillä voi olla suurin arvo, pienin arvo tai molemmat. Toisaalta funktiolla ei välttämättä ole kumpaakaan arvoa.

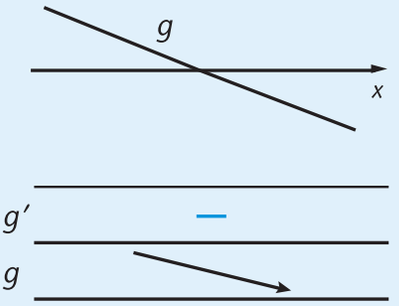
Ensimmäisen ja kolmannen asteen polynomifunktioilla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa. Sen sijaan toisen asteen polynomifunktiolla on joko suurin arvo tai pienin arvo, mutta ei molempia.

Suurimman ja pienimmän arvon ratkaisemisessa hyödynnetään derivaattaa, koska derivaatan nollakohdat ovat mahdollisia ääriarvokohtia. Laatimalla funktiolle merkki- ja kulkukaavio ääriarvo voidaan todeta suurimmaksi tai pienimmäksi arvoksi.

Ensimmäisen asteen polynomifunktio

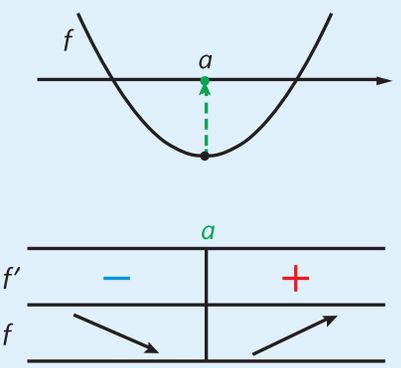


Ei pienintä arvoa.
Ei suurinta arvoa.

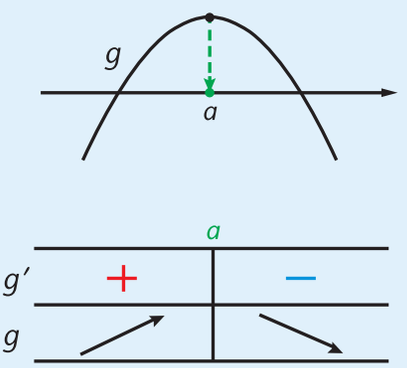


Ei pienintä arvoa.
Ei suurinta arvoa.

Toisen asteen polynomifunktio

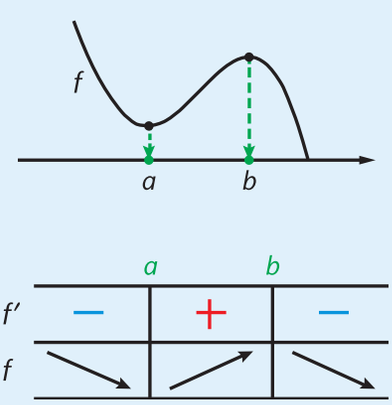


Pienin arvo minimikohdassa $x = a$.
Ei suurinta arvoa.

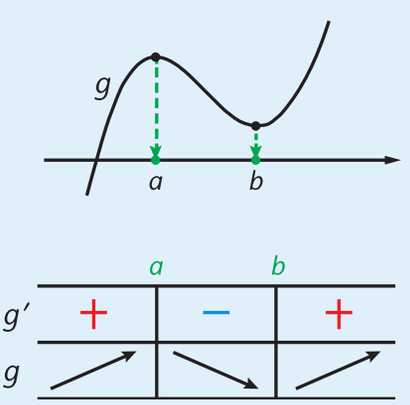


Ei pienintä arvoa.
Suurin arvo maksimikohdassa $x = a$.

Kolmannen asteen polynomifunktio

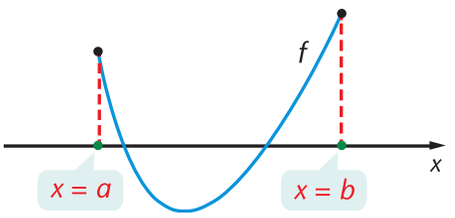


Ei pienintä arvoa.
Ei suurinta arvoa.
Paikallinen minimikohta $x = a$.
Paikallinen maksimikohta $x = b$.



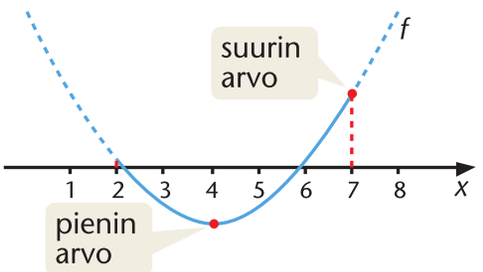
Ei pienintä arvoa.
Ei suurinta arvoa.
Paikallinen minimikohta $x = b$.
Paikallinen maksimikohta $x = a$.

Funktio voidaan määritellä myös rajoitetulla välillä. Tällöin muuttuja ei voi saada mitä tahansa reaaliarvoja, vaan se saa arvoja esimerkiksi suljetulta väliltä $[a, b]$. Funktion kuvaaja on tällöin ”katkaistu” käyrä.

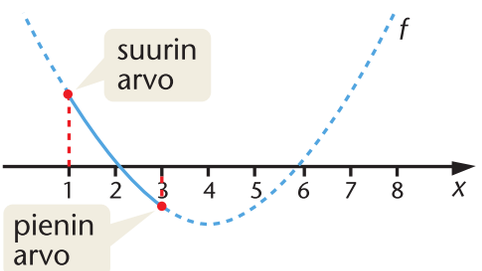


Jos funktio on jatkuva, niin tällainen ”katkaistu” funktio ei voi saada rajattoman suuria eikä rajattoman pieniä arvoja. Niinpä tällaisen funktion saamien arvojen joukosta löytyy varmasti suurin ja pienin arvo.

Tilannetta voidaan havainnollistaa tarkastelemalla toisen asteen polynomifunktion kuvaajia suljetuilla väleillä.



Välillä $[2, 7]$ funktiolla on suurin arvo kohdassa $x = 7$ ja pienin arvo derivaatan nollakohdassa $x = 4$.



Välillä $[1, 3]$ funktiolla on suurin arvo kohdassa $x = 1$ ja pienin arvo kohdassa $x = 3$. Pienin arvo ei voi sijaita derivaatan nollakohdassa, koska se ei kuulu välille $[1, 3]$.

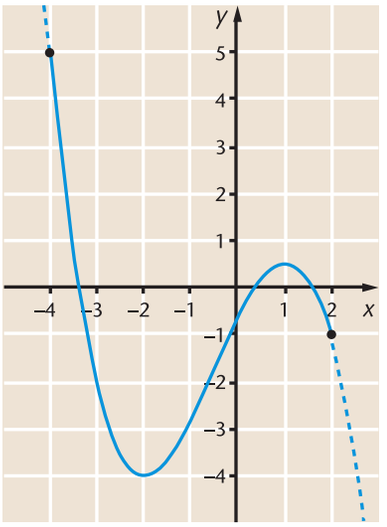
Suurin ja pienin arvo

Suljetulla välillä polynomifunktiolla on sekä suurin että pienin arvo. Ne voivat sijaita

- välin päätepisteissä
- derivaatan nollakohdissa.

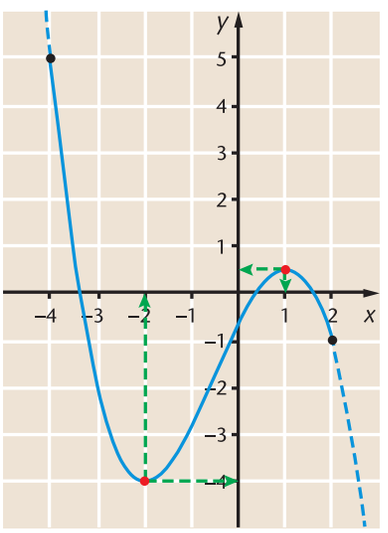
ESIMERKKI 4

Tutki funktion f kuvaajaa välillä $[-4, 2]$. Laadi funktiolle merkki- ja kulkukaavio ja määritä funktion suurin ja pienin arvo mainitulla välillä.



RATKAISU

Funktion kuvaaja on katkaistu käyrä, joka päättyy pisteisiin $(-4, 5)$ ja $(2, -1)$.
Derivaatalla on kaksi nollakohtaa, $x = -2$ ja $x = 1$.



Välillä $[-4, -2]$ f on vähenevä eli derivaatta on negatiivinen.

Välillä $[-2, 1]$ f on kasvava eli derivaatta on positiivinen.

Välillä $[1, 2]$ f on vähenevä eli derivaatta on negatiivinen.

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Merkitään siihen välin päätepisteet sekä derivaatan nollakohdat.

Suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

	−4		−2		1		2
f'		−	0	+	0	−	
f		↘	max	↗	min	↘	max / min

Suurin arvo on kohdassa $x = -4$, koska kuvaajan perusteella $f(-4) \approx 5$ ja $f(1) \approx 0{,}5$.

Pienin arvo on kohdassa $x = -2$, koska $f(-2) \approx -4$ ja $f(2) \approx 1$.

VASTAUS

Suurin arvo on $f(-4) \approx 5$, ja pienin arvo on $f(-2) \approx -4$.

ESIMERKKI 5 Laske funktion $f(x) = x^2 + 2x - 48$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 3]$.

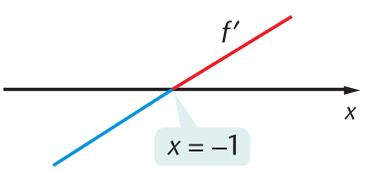
RATKAISU Suljetulla välillä polynomifunktion suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

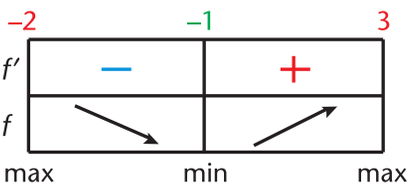
Derivoidaan funktio f ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \quad \big| : 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohta sijaitsee tarkasteluvälillä $[-2, 3]$. Derivaatan kuvaaja on nouseva suora. Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki ja laaditaan merkki- ja kulkukaavio.





Kulkukaavio perusteella suurin arvo sijaitsee välin päätepisteissä. Lasketaan funktion arvo näissä kohdissa ja valitaan näistä suurin.

- $f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 48 = -48$
- $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 48 = -33$

Suurin arvo on siis -33.

Pienin arvo sijaitsee derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 48 = -49$$

Pienin arvo on siis -49.

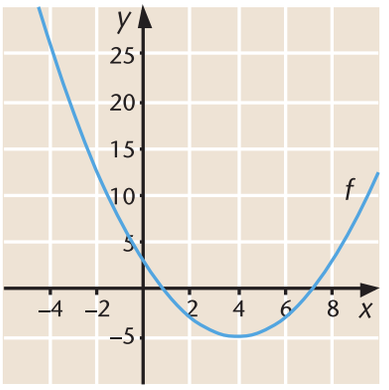
VASTAUS Suurin arvo on -33, ja pienin arvo on -49.

Tehtäviä

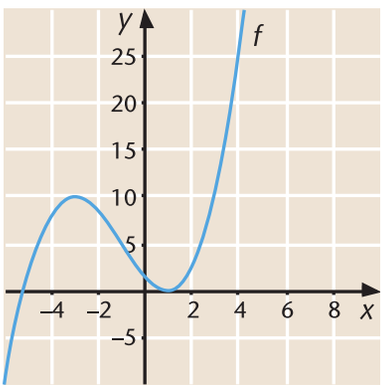
Paikalliset ääriarvot

176. Määritä kuvasta funktion f ääriarvokohdat ja ääriarvot.

a)



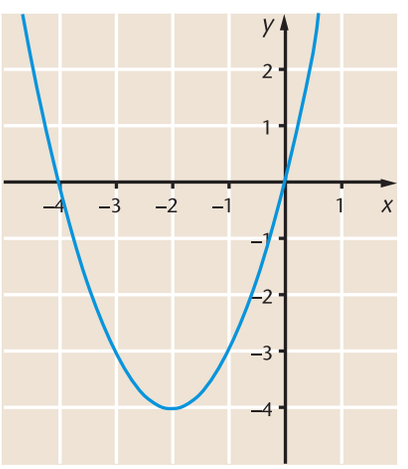
b)



E1 177. Päättele kuvaajan perusteella funktion ääriarvokohdat, kun kuvaaja esittää

a) funktiota f

b) funktion f derivaattaa f'.



E2 178. Laske funktion $f(x) = -3x^2 + 18x$

a) ääriarvokohdat b) ääriarvot.

179. Määritä funktion f ääriarvot, kun

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$.

180. Määritä funktion $g(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ ääriarvot.

181. Määritä funktion g ääriarvokohdat, kun

a) $g(x) = 5x^2 + 20x - 4$ b) $g(x) = -4x^3 + 2x^2 - 8x + 1$.

182. Mitkä ovat funktion h ääriarvokohdat, kun

a) $h(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

b) $h(x) = 0{,}25x^2 - 0{,}07x + 0{,}84$?

183. Osoita, että funktiolla $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x$ ei ole ääriarvoja.

184. Piirrä esimerkki funktiosta, jolla on
a) ääriarvo $f(2) = 3$ b) ääriarvot $f(-1) = -4$ ja $f(2) = 5$.

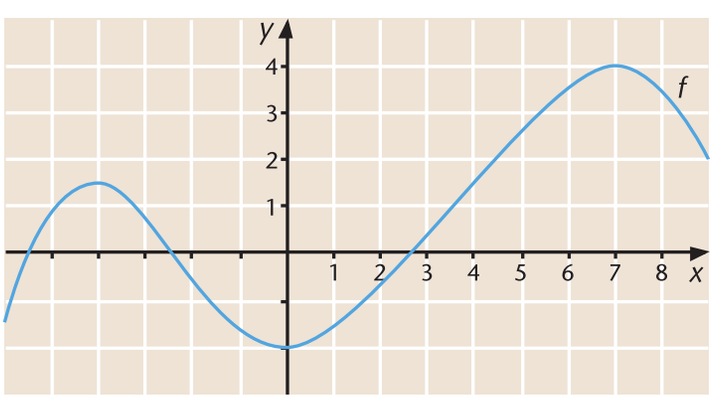
185. Määritä vakio c siten, että funktion $f(x) = x^3 - 13{,}5x^2 + 24x + c$ minimi on 6.

E3 186. Erään bakteerilajin määrä vedessä F (kpl/ml) riippuu veden lämpötilasta T (°C) seuraavasti: $F(T) = -0{,}3125T^2 + 16{,}25T$.
a) Millä välillä veden lämpötilan tulee olla, jotta kyseinen bakteeri säilyy elossa?
b) Missä lämpötilassa bakteerien määrä on suurimmillaan?
c) Mikä on tällöin bakteerien määrä?

187. Nuoli ammutaan varsijousella vinosti ylöspäin. Nuolen korkeutta h (metriä) ajan t (sekuntia) funktiona esittää $h(t) = 1{,}9 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$.
a) Milloin nuoli on korkeimmalla kohdalla?
b) Kuinka korkealla nuoli käy?

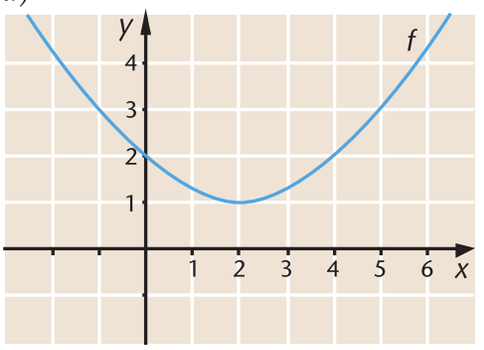
188. Leikkauspotilaalle annettiin unilääkettä siten, että imeytyneen lääkkeen määrä f (mg) verenkierrossa vaihteli ajan t (h) funktiona seuraavasti: $f(t) = -400t^2 + 2000t$. Potilas oli mahdollista leikata, jos lääkkeen määrä elimistössä oli vähintään 1600 mg. Lääkeannos annettiin hetkellä $t = 0$.
a) Milloin lääkkeen määrä verenkierrossa oli suurimmillaan ja kuinka paljon sitä oli?
b) Kuinka kauan leikkaus saattoi enintään kestää?

Suurin ja pienin arvo E4 189. Tarkastele funktion f kuvaajaa välillä $[-6, 9]$.
a) Missä kohdassa funktio saa suurimman arvonsa?
b) Missä kohdassa funktio saa pienimmän arvonsa?
c) Mikä on funktion suurin ja pienin arvo?

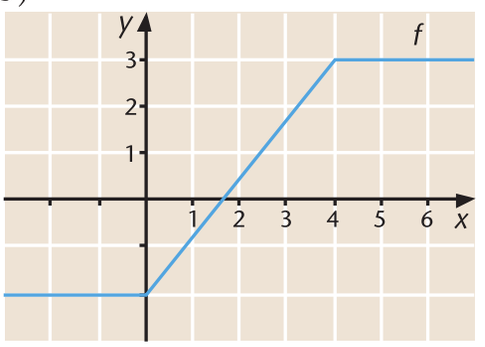


190. Määritä kuvaajan perusteella funktion suurin ja pienin arvo.

a)



b)



191. Missä kohdassa funktio $g(x) = -x^2 - 4x + 1$ saa suurimman arvonsa? Mikä on tämä suurin arvo?

192. Missä kohdassa funktio $r(x) = 3x^2 - 18x + 5$ saa pienimmän arvonsa? Mikä on tämä pienin arvo?

E5 193. Laske funktion $f(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}2x - 0{,}5$ suurin ja pienin arvo välillä

a) $[-5, 1]$ b) $[0, 6]$.

194. Määritä funktion f: $f(x) = 6x - \frac{1}{2}x^2$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 10]$. [K1992, 2]

195. Laske funktion $t(x) = x^3 + 9x^2 - 21x + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 5]$.

196. Laske funktion $g(x) = -2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

197. Määritä sellainen luku, että luvun ja sen neliön summa on mahdollisimman pieni. Mikä on tämä summa?

198. Veden tilavuus vaihtelee lämpötilan T funktiona. Jos punnitaan 1,000 kg vettä, sen tilavuus kuutiosenttimetreinä on likimain $V(T) = 0{,}0079T^2 - 0{,}0663T + 1000{,}1$. Missä lämpötilassa veden tilavuus on suurimmillaan, kun $0\ °\text{C} \le T \le 10\ °\text{C}$?

199. Erään vuorokauden aikana on hetkellä t ulkoilman lämpötila $x(t) = -0{,}02t^2 + 0{,}61t + 4{,}00$, $0 \le t \le 24$; aika t on annettu tunteina ja lämpötila $x(t)$ celsiusasteina. Milloin lämpötila on korkeimmillaan ja milloin matalimmillaan? [K1998, 6a]

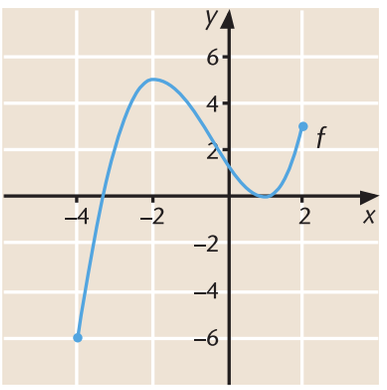
200. Tyhjennettävässä vesisäiliössä olevan veden tilavuus litroina on $V(t) = 520(20 - t)^2$, jossa t on aika minuutteina. Säiliö tyhjenee nopeudella $q(t) = -V'(t)$ (litraa/min).

a) Säiliön tyhjentäminen alkaa hetkellä $t = 0$. Milloin säiliö on tyhjä? Piirrä funktion V kuvaaja.

b) Määritä funktio q ja piirrä sen kuvaaja. Milloin tyhjenemisnopeus on suurimmillaan? [K2001, 12]

Sekalaisia tehtäviä

201. Selvitä kuvan perusteella, missä funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa, kun $-4 \le x \le 2$. Mitkä ovat nämä arvot?



202. Määritä funktion $g(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ ääriarvot.

203. Määritä funktion $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - 14x - 25$ suurin arvo välillä $[-2, 4]$. [K1989, 7a]

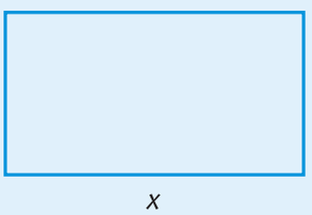
204. Kahden luvun summa on 250. Määritä nämä luvut siten, että niiden tulo on mahdollisimman suuri.

205. Erään kemiallisen reaktion nopeus v riippuu suolahapon konsentraatiosta x (mol/l) seuraavasti: $v(x) = 2{,}0x(0{,}5 - 2x)$, $0 \le x \le 0{,}25$. Mikä on suolahappokonsentraation oltava, jotta reaktion nopeus olisi mahdollisimman suuri?

3.3 Derivaatan geometrisia sovelluksia

POHDINTA 1

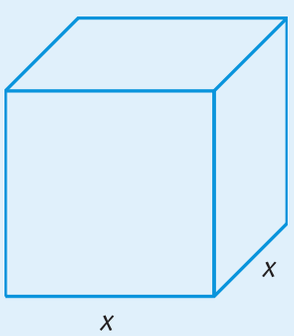
Suorakulmion piiri on 20 m. Merkitään suorakulmion kantaa kirjaimella x.



- Muodosta kirjaimen x avulla lauseke suorakulmion korkeudelle.
- Mitä arvoja x voi saada?
- Muodosta funktio $A(x)$, joka kuvaa suorakulmion pinta-alaa.
- Määritä derivaatan avulla funktion A suurin arvo.
- Mitkä ovat tällöin suorakulmion sivujen pituudet?

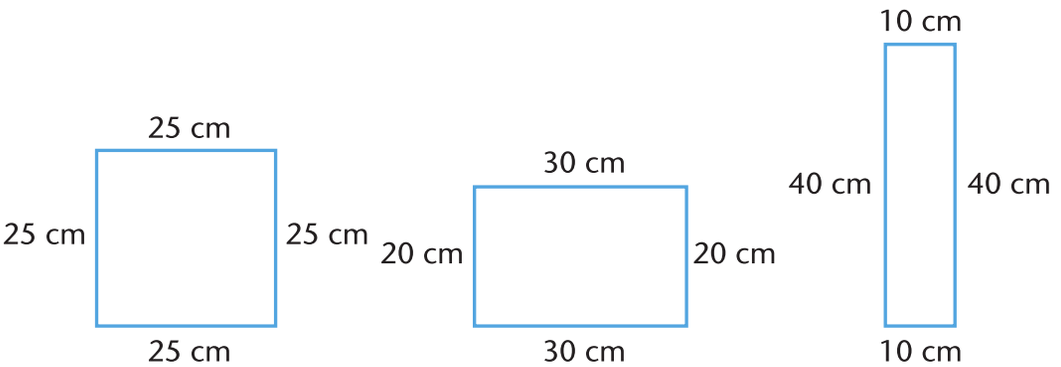
POHDINTA 2

Suorakulmaisen särmiön pohja on neliö, jonka sivun pituus on x. Särmien yhteispituus on 32 m.



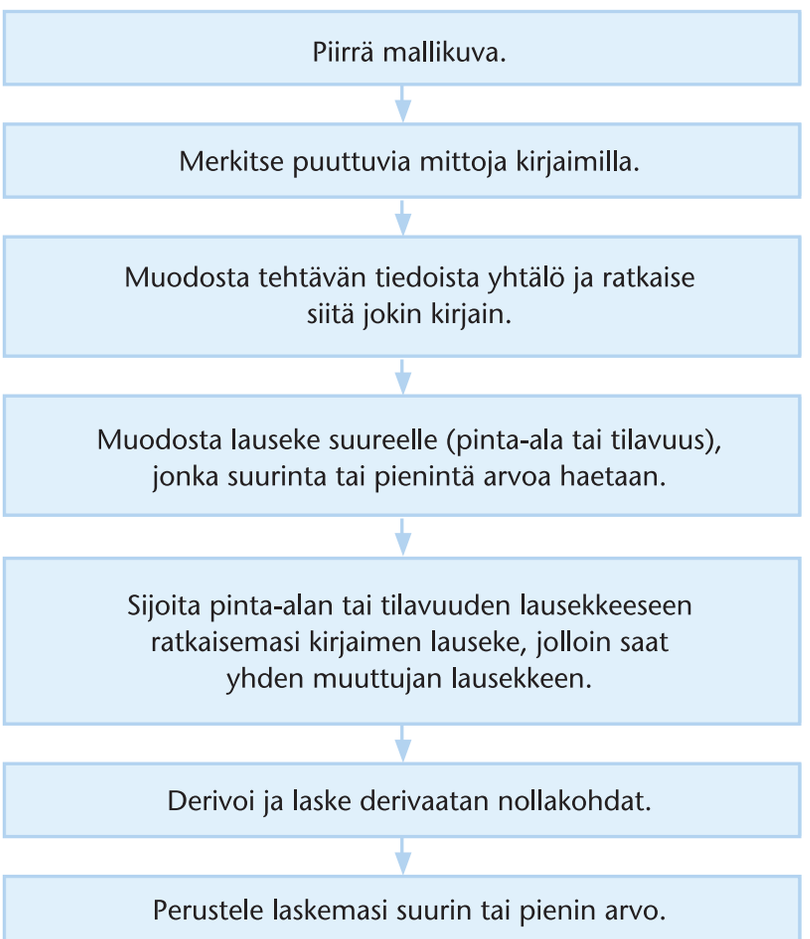
- Muodosta kirjaimen x avulla lauseke särmiön korkeudelle.
- Mitä arvoja x voi saada?
- Muodosta funktio $V(x)$, joka kuvaa särmiön tilavuutta.
- Määritä derivaatan avulla funktion V suurin arvo.
- Mitkä ovat tällöin särmiön mitat?

Jos kuvion mittoja ei ole tarkasti määrätty, vaan tiedetään esimerkiksi kuvion piirin pituus, voidaan tämän ehdon perusteella muodostaa useita erilaisia kuvioita. Esimerkiksi suorakulmio, jonka piirin pituus on 100 cm, voidaan muodostaa seuraavasti:



Derivaatan fysikaaliset sovellukset s. 155

Geometrisissa sovelluksissa etsitään optimipinta-alaa tai -tilavuutta. Näissä tilanteissa kannattaa usein edetä seuraavalla tavalla:

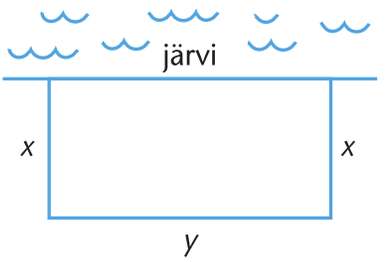


ESIMERKKI 1

Pekka on saanut vaariltaan suorakulmion muotoisen tontin, joka rajoittuu yhdeltä sivultaan järven rantaan. Muuta rajalinjaa on 600 m. Miten Pekan kannattaa valita tonttinsa pituus ja leveys, jotta pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

RATKAISU

Piirretään mallikuva. Merkitään tontin pituutta ja leveyttä kirjaimilla x ja y.



Koska rajalinjaa on yhteensä 600 m, saadaan yhtälö

$$2x + y = 600$$
$$y = 600 - 2x$$

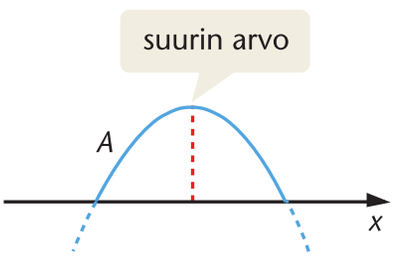
Tontin pinta-ala $A = xy$.

Sijoitetaan y:n paikalle lauseke $600 - 2x$.

$$A(x) = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$$

Pinta-alan A kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Suurin arvo löytyy tällöin paraabelin huipusta eli derivaatan nollakohdasta. Lasketaan pinta-alan derivaatta.

$$A'(x) = 600 - 4x$$



Koska kyseessä on ääriarvon etsiminen, niin lasketaan derivaatan nollakohdat.

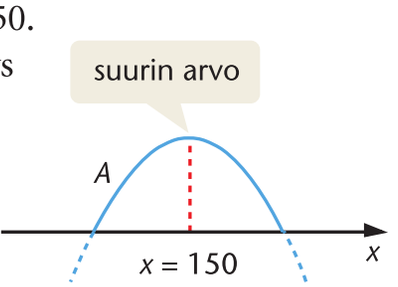
$$A'(x) = 600 - 4x = 0$$
$$-4x = -600 \quad | : (-4)$$
$$x = 150$$

Tehtävän voi ratkaista myös kulkukaaviolla.

Kulkukaaviota ei tarvita, koska funktion A kuvaaja pystytään hahmottelemaan.

Pinta-ala on suurimmillaan, kun $x = 150$. Tällöin tontin pituus on 150 m ja leveys

$$y = 600 - 2x = 600 - 2 \cdot 150 = 300 \text{ (m)}$$

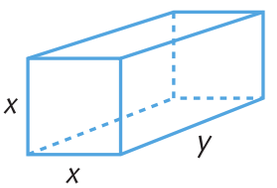


VASTAUS tontin pituus 150 m ja leveys 300 m

ESIMERKKI 2 Alumiinitangosta tehdään suorakulmaisen särmiön muotoisen teltan kehikko. Teltan päädyt ovat neliöitä. Mitoita teltta niin, että sen tilavuus on mahdollisimman suuri. Mikä teltan tilavuus tällöin on? Alumiinitankoa on käytettävissä 25 m.

RATKAISU Koska teltan päädyt ovat neliöitä, niin merkitään teltan leveyttä ja korkeutta kirjaimella x sekä teltan pituutta kirjaimella y. Alumiinitankoa on käytettävissä 25 m, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 4x + 4x + 4y &= 25 \\ 8x + 4y &= 25 \\ 4y &= 25 - 8x \quad \big| : 4 \\ y &= \frac{25}{4} - 2x \end{aligned}$$



Koska pituus on aina suurempi kuin nolla, saadaan kaksi ehtoa.

Ehto 1

$x > 0$

Ehto 2

$$\begin{aligned} y &> 0 \\ \frac{25}{4} - 2x &> 0 \\ -2x &> -\frac{25}{4} \quad \big| : (-2) \\ x &< \frac{25}{8} \end{aligned}$$

Koska $x > 0$ ja $x < \frac{25}{8}$, niin x saa arvoja väliltä $\left]0, \frac{25}{8}\right[$.

Suorakulmaisen särmiön muotoisen teltan tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= x^2 y \\ &= x^2\left(\frac{25}{4} - 2x\right) \\ &= \frac{25}{4}x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

$y = \frac{25}{4} - 2x$

Koska kysytään suurinta tilavuutta, derivoidaan tilavuuden V lauseke.

$$V'(x) = 2 \cdot \frac{25}{4}x - 3 \cdot 2x^2 = \frac{25}{2}x - 6x^2$$

Koska kyseessä on ääriarvon etsiminen, niin lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$V'(x) = 0$$

$$\frac{25}{2}x - 6x^2 = 0$$

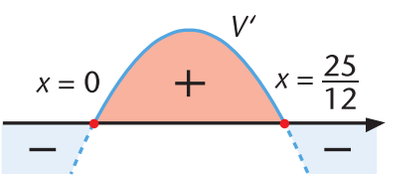
$$x\left(\frac{25}{2} - 6x\right) = 0$$

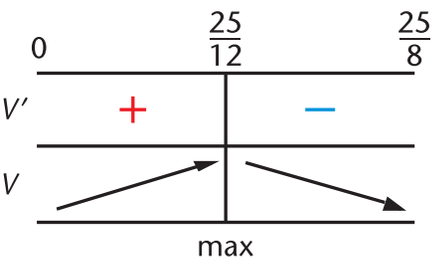
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad \frac{25}{2} - 6x = 0$$

$$-6x = -\frac{25}{2} \qquad \big| : (-6)$$

$$x = \frac{25}{12} = 2{,}08\ldots$$

Muodostetaan derivaatan V' merkkikaavio derivaatan kuvaajan perusteella. Rajataan merkkikaavio ja kulkukaavio tarkasteltavalle välille $\left]0, \frac{25}{8}\right[$.





Tilavuuden V maksimikohta on siis $x = \frac{25}{12}$.

Tällöin $y = \frac{25}{4} - 2x = \overset{3)}{} \frac{25}{4} - 2 \cdot \frac{25}{12} = \frac{75}{12} - \frac{50}{12} = \frac{25}{12} = 2{,}08\ldots$

Teltan mitat ovat siis

$$x = \frac{25}{12}\ \text{m} = 2{,}08\ldots\ \text{m} \approx 2{,}1\ \text{m} \quad \text{ja} \quad y = \frac{25}{12}\ \text{m} = 2{,}08\ldots\ \text{m} \approx 2{,}1\ \text{m}$$

Teltan tilavuus on

$$V\left(\frac{25}{12}\text{m}\right) = \left(\frac{25}{12}\ \text{m}\right)^2 \cdot \frac{25}{12}\ \text{m} = 9{,}042\ldots\ \text{m}^3 \approx 9{,}0\ \text{m}^3$$

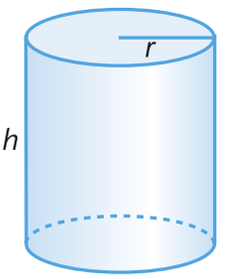
VASTAUS Teltan mitat ovat 2,1 m, 2,1 m ja 2,1 m sekä tilavuus 9,0 m^3.

ESIMERKKI 3

Suoran ympyrälieriön muotoinen kynttilä halutaan valmistaa tilavuudeltaan mahdollisimman suureksi. Miten kynttilän mitat on valittava, kun pohjan halkaisijan ja lieriön korkeuden yhteispituus on 15 cm?

RATKAISU

Merkitään kynttilän pohjaympyrän sädettä kirjaimella r ja kynttilän korkeutta kirjaimella h. Pohjan halkaisijan $2r$ ja lieriön korkeuden h yhteispituus on 15 cm.



$$2r + h = 15$$
$$h = 15 - 2r$$

Koska pituus on aina suurempi nolla, saadaan kaksi ehtoa:

Ehto 1

$r > 0$

Ehto 2

$$h > 0$$
$$15 - 2r > 0$$
$$-2r > -15 \quad | : (-2)$$
$$r < 7{,}5$$

Koska $r > 0$ ja $r < 7{,}5$, niin kynttilän pohjan säde r voi vaihdella välillä $]0; 7{,}5[$.

Kynttilän tilavuus on

$$V(r) = A_{\text{pohja}} \cdot h$$
$$= \pi r^2 h$$
$$= \pi r^2 (15 - 2r)$$
$$= 15\pi r^2 - 2\pi r^3$$

Derivoidaan funktio.

$$V'(r) = 15\pi \cdot 2r - 2\pi \cdot 3r^2$$
$$= 30\pi r - 6\pi r^2$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$30\pi r - 6\pi r^2 = 0$$
$$\pi r(30 - 6r) = 0$$

Nollakohdat voi ratkaista myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

Tulon nollasäännön mukaan

$$\pi r = 0$$
$$r = 0$$

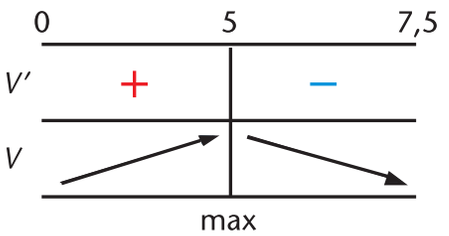
tai

$$30 - 6r = 0$$
$$-6r = -30 \quad | : (-6)$$
$$r = 5$$

Derivaatan merkin voi päätellä myös derivaatan kuvaajan avulla kuten esimerkissä 2.

Tutkitaan derivaatan merkki testipisteiden avulla.

$$V'(1) = 30\pi \cdot 1 - 6\pi \cdot 1^2 = 24\pi = 75{,}39\ldots > 0$$
$$V'(6) = 30\pi \cdot 6 - 6\pi \cdot 1^2 = -36\pi = -113{,}09\ldots < 0$$



Tilavuus saa suurimman arvonsa, kun $r = 5$ (cm).

Kynttilän korkeus on $h = 15 - 2 \cdot 5 = 5$ (cm).

VASTAUS

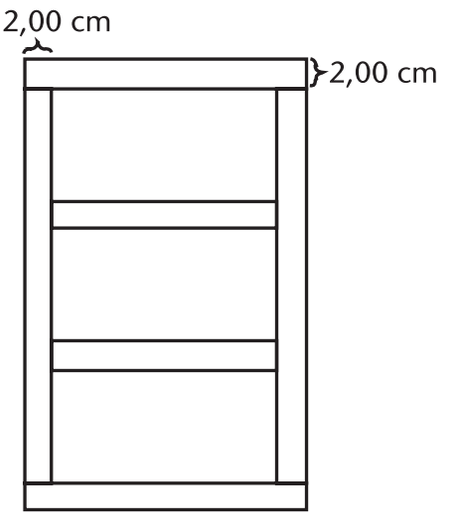
Kynttilän tilavuus on suurin, kun pohjan säde ja korkeus ovat molemmat 5 cm.

Tehtäviä

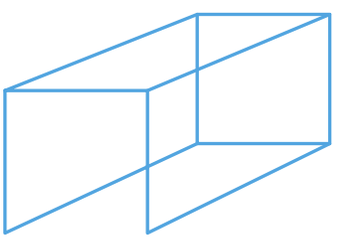
E1 206. Aitaa on käytettävissä 140 m. Kuinka suuren suorakulmion muotoisen alueen voi suurimmillaan rajata? Mitkä ovat sivujen mitat?

207. Maanviljelijä haluaa aidata mahdollisimman suuren suorakulmion muotoisen laitumen ja jakaa sen kahteen osaan yhden sivun suuntaisella aidalla. Aitaa on käytettävissä 180 m. Määritä laitumen pituus ja leveys. [K1986, 8]

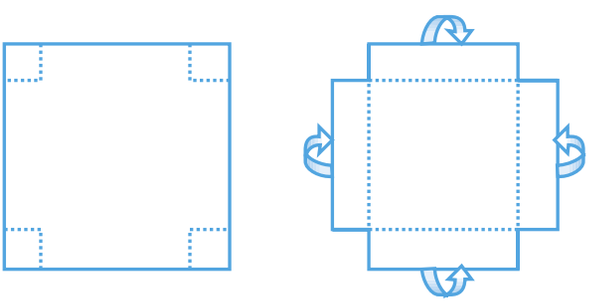
208. Keittiöön rakennetaan kuvan mukainen maustehyllykkö. Hyllykköön on käytettävissä 3,00 m lautaa. Laudan leveys on 2,0 cm. Kuinka hyllykön mitat on valittava, jotta se peittää mahdollisimman suuren alan seinää?



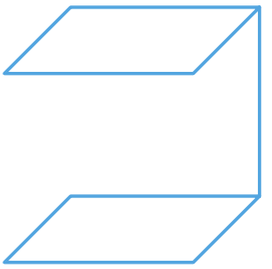
E2 209. Käytössä on 36 m rautaputkea, josta rakennetaan kuvan mukainen autotallin runko. Rakennelman etu- ja takaseinä ovat neliöitä. Mitoita runko niin, että tilavuus on suurin mahdollinen.



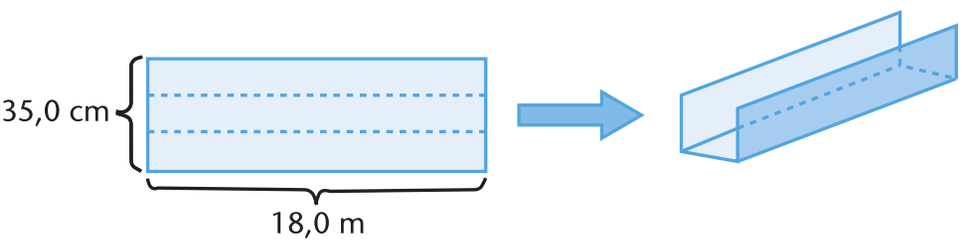
210. Neliön muotoisesta pahvinpalasta tehdään kanneton, suorakulmaisen särmiön muotoinen laatikko. Pahvin sivun pituus on 24 cm. Jokaisesta kulmasta leikataan yhtä suuret neliöt pois, minkä jälkeen jäljelle jääneestä pahvista taitetaan reunat ylös. Miten poisleikattavan neliön sivun pituus täytyy valita, että laatikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri?



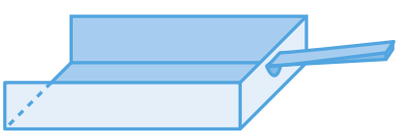
211. Rautalangasta, jonka pituus on 50 cm, taivutetaan kuvan mukainen kehikko suorakulmaista särmiötä varten. Langan päistä varataan kummastakin 1 cm pientä silmukkaa varten. Särmiön pohja on neliön muotoinen. Miten tämän neliön sivu ja miten kehikon korkeus on valittava, kun särmiön tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi? [K1993, 9]



212. Suorakulmion muotoinen pelti taitellaan kahdesta kohdasta siten, että pellistä muodostuu räystäskouru. Pellin leveys on 35,0 cm ja pituus 18,0 m. Kourun reunat taivutetaan yhtä korkeiksi ja pohjaan nähden suoraan kulmaan. Määritä kourun mitat niin, että kourun tilavuus on mahdollisimman suuri.



213. Neliön muotoisesta pellistä, jonka ala on 900 cm^2, tehdään rikkalapio. Neliön kahdesta kulmasta leikataan pois yhtä suuret neliöt ja jäljelle jääneestä pellistä taitetaan reunat ylös. Mitkä on suurimman tällaisen rikkalapion mitat?



E3 214. Suoran ympyrälieriön korkeuden ja pohjan halkaisijan summa on 20. Määrää lieriön korkeus siten, että lieriö on tilavuudeltaan mahdollisimman suuri. Laske suurin tilavuus. [S1988, 8]

215. Suoraa ympyrälieriötä varten tehdään metrin pituisesta rautalangasta kehikko, joka muodostuu kahdesta samankokoisesta vaakaympyrästä ja niitä yhdistävästä pystysauvasta. Missä rajoissa ympyröiden säde voi vaihdella, jotta syntysi haluttu kehikko, ja millä säteen arvolla lieriön tilavuus tulisi mahdollisimman suureksi? [S1996, 7b]

216. Tasakylkisen kolmion kanta on 16 cm ja korkeus 4,0 cm. Sisään piirretään mahdollisimman suuri suorakulmio. Suorakulmion yksi sivu on kolmion kannalla ja kaksi kärkeä muilla sivuilla. Laske suorakulmion mitat. Ohje: käytä yhdenmuotoisuutta.

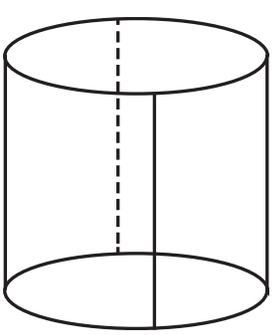
Sekalaisia tehtäviä

217. Ville rakentaa kesämökkinsä ulkorakennuksen seinustalle suorakulmion muotoisen aitauksen kotieläimille. Aitaa on käytettävissä 24 m ja yhtenä sivuna on ulkorakennuksen seinä. Miten aitauksen mitat on valittava, että pinta-ala olisi suurin? Kuinka suuri pinta-ala on?

218. Pekka rakentaa eläinnäyttelyyn viisi vierekkäistä samankokoista karsinaa. Aitaa on käytettävissä 45,0 m. Miten yhden karsinan mitat on valittava, että koko aitauksen pinta-ala on mahdollisimman suuri?

219. Kansainvälisen ilmakuljetusjärjestön IATA:n vaatimusten mukaan matkustamoon otettavan laukun pituuden, leveyden ja korkeuden summa ei saa ylittää 115 cm. Mikä on sellaisen IATA:n hyväksymän laukun suurin tilavuus, jonka korkeus on 20 cm? [S1995, 7c]

220. Suoran ympyrälieriön muotoista lampunvarjostinta varten rakennetaan kuvan mukainen metallikehikko. Kehikon rakentamiseen on käytössä 2,0 m rautalankaa. Laske pohjaympyrän säde ja varjostimen korkeus, kun halutaan valmistaa tilavuudeltaan mahdollisimman suuri varjostin.



3.4 Derivaatan sovelluksia talouselämästä

Talouselämän sovellukset liittyvät usein suurimman myyntitulon tai voiton määrittämiseen. Myyntituloille saadaan lauseke, kun kappalehinta ja myyty määrä kerrotaan keskenään.

myyntitulot	=	kappalehinta	·	myyty määrä

Myyntivoiton lauseke saadaan, kun kappalehinnasta vähennetään kustannukset.

myyntivoitto	=	kappalehinta – kustannukset/kpl	·	myyty määrä

Tehtävän ratkaisu on pääperiaatteiltaan samanlainen kuin muissakin ääriarvosovellustehtävissä.

Muodosta funktio, jonka suurinta tai pienintä arvoa haetaan.

↓

Hae väli, jolla funktio on määritelty.

↓

Muodosta derivaattafunktio.

↓

Laske derivaatan nollakohdat.

↓

Tutki funktion kulkua derivaatan merkkikaavion avulla ja päättele siitä, missä haluttu ääriarvokohta sijaitsee.

↓

Vastaa siihen, mitä kysytään. Usein halutaan tietää
- mikä on suurin tai pienin arvo

tai
- kohta, jossa ääriarvo saavutetaan.

ESIMERKKI 1

Harrastelijateatterin esitykseen myytyjen lippujen määrä riippuu lipun hinnasta x (€) funktion $f(x) = 300 - 11{,}5x$ mukaisesti, kun $5 \le x \le 20$. Millä teatterilipun hinnalla myyntitulot olisivat

a) mahdollisimman suuret

b) kaikkein pienimmät?

RATKAISU

Muodostetaan ensin myyntituloja kuvaava funktio:

$$M(x) = x(300 - 11{,}5x) = 300x - 11{,}5x^2$$

Derivoidaan funktio.

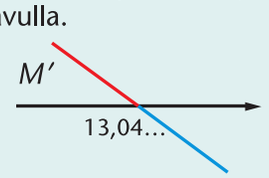
$$M'(x) = 300 - 23x$$

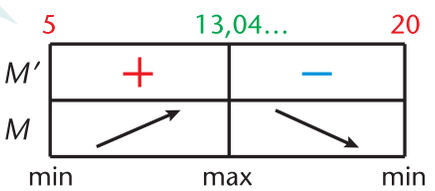
Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} 300 - 23x &= 0 \\ -23x &= -300 \quad \big| : (-23) \\ x &= 13{,}04\ldots \end{aligned}$$

Muodostetaan merkki- ja kulkukaavio tarkasteltavalle välille $[5, 20]$.

Derivaatan merkit voi päätellä myös kuvaajan avulla.





Tutkitaan derivaatan merkki testipisteiden avulla.

- $M'(6) = 300 - 23 \cdot 6 = 162$
- $M'(15) = 300 - 23 \cdot 15 = -45$

a) Funktio saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa. Lipun hinta on tällöin 13,04… € ≈ 13 €.

Suurin arvo eli suurimmat myyntitulot:
$M(13{,}04\ldots) = 300 \cdot 13{,}04\ldots - 11{,}5 \cdot (13{,}04\ldots)^2 = 1956{,}521\ldots$ (€)

Funktio saa pienimmän arvonsa jommassakummassa välin päätepisteessä.

$$M(5) = 300 \cdot 5 - 11{,}5 \cdot 5^2 = 1212{,}5 \text{ (€)}$$
$$M(20) = 300 \cdot 20 - 11{,}5 \cdot 20^2 = 1400 \text{ (€)}$$

Pienin arvo saadaan siis, kun $x = 5$ €.

VASTAUS

a) Myyntitulot ovat suurimmat, kun lipun hinta on 13 €.

b) Myyntitulot ovat pienimmät, kun lipun hinta on 5 €.

ESIMERKKI 2

Rannalla kiertelevä virvoitusjuomien myyjä myy viikossa 240 pulloa juomaa hintaan 2,00 €. Jokainen 40 sentin hinnankorotus laskee viikon aikana myytyjen pullojen määrää 40 kappaleella. Millä hinnalla juoma kannattaa myydä, jotta viikon myyntitulo olisi mahdollisimman suuri?

RATKAISU

Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio M taulukon avulla.

Juoman hinta (€)	Myynti viikossa (kpl)	Viikon myyntitulo (€)
2	240	$2 \cdot 240$
$2 + 0{,}4$	$240 - 40$	$(2 + 0{,}4)(240 - 40)$
$2 + 0{,}4 \cdot 2$	$240 - 40 \cdot 2$	$(2 + 0{,}4 \cdot 2)(240 - 40 \cdot 2)$
$2 + 0{,}4 \cdot 3$	$240 - 40 \cdot 3$	$(2 + 0{,}4 \cdot 2)(240 - 40 \cdot 3)$
$2 + 0{,}4x$	$240 - 40x$	$(2 + 0{,}4x)(240 - 40x)$

Kun hinta on $2 + 0{,}4x$, viikon myyntitulo on

myyntitulot = hinta · määrä

$$\begin{aligned} M(x) &= (2 + 0{,}4x)(240 - 40x) \\ &= 2 \cdot 240 + 2 \cdot (-40x) + 0{,}4x \cdot 240 + 0{,}4x \cdot (-40x) \\ &= 480 - 80x + 96x - 16x^2 \\ &= -16x^2 + 16x + 480 \end{aligned}$$

Juoman hinta ja kappalemääräinen myynti eivät voi olla negatiivisia lukuja, joten saadaan kaksi ehtoa:

Hinta

$$\begin{aligned} 2 + 0{,}4x &\geq 0 \\ 0{,}4x &\geq -2 \quad \big| : 0{,}4 \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$

Määrä

$$\begin{aligned} 240 - 40x &\geq 0 \\ -40x &\geq -240 \quad \big| : (-40) \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$

Funktio M on siis määritelty, kun $-5 \leq x \leq 6$.

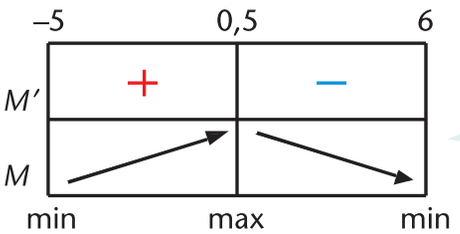
Lasketaan funktion M derivaatta.

$$\begin{aligned} M'(x) &= \mathrm{D}(-16x^2 + 16x + 480) \\ &= 2 \cdot (-16x) + 16 \\ &= -32x + 16 \end{aligned}$$

Derivaatta on nolla, kun

$$\begin{aligned} -32x + 16 &= 0 \\ -32x &= -16 \quad \big| : (-32) \\ x &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Tutkitaan funktion kulkua merkkikaavion avulla.



$M'(0) = -32 \cdot 0 + 36 = 36$

$M'(3) = -32 \cdot 3 + 36 = -60$

Viikon myyntitulo on suurin, kun $x = 0{,}5$.

Tällöin pullon myyntihinta on $2 + 0{,}4x = 2 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 2{,}20$ (€).

Vastaus Myyntitulo on suurin, kun pullon hinta on 2,20 €.

Tehtäviä

221. Amerikkalaisen taloustieteilijä Lafferin mukaan julkisyhteisön verokertymän f (mrd. €) riippuvuus veroasteesta x (%) on muotoa $f(x) = Ax^2 + Bx$. Eräällä alueella $A = -\frac{1}{240}$ ja $B = \frac{11}{24}$. Millä veroasteella saadaan mainitulla alueella suurin verokertymä, kun $0 \le x \le 80$?

E1 222. Erään tuotteen kappalehinta x vaihteli 15,50 eurosta 30 euroon. Hinnalla x tuotetta myytiin $2500 - 55x$ kappaletta.
a) Millä hinnalla tuotteen myynnistä saatavat tulot olisivat mahdollisimman suuret?
b) Millä hinnalla tuotteen myynnistä saatavat tulot olisivat kaikkein pienimmät?
c) Laske myyntitulojen suurin ja pienin arvo.

223. Paikkakunnalla todettiin uimahallin päivittäisen kävijämäärän q (kpl) riippuvan hallimaksusta x (€) seuraavasti: $q(x) = 1300 - 325x$, kun $0 \le x \le 3{,}0$. Kuinka suurella hallimaksulla päivittäinen maksutulo on suurin?

224. Erään tuotteen hinta voidaan asettaa välille 150 €/yksikkö…400 €/yksikkö. Jos hinta on x €/yksikkö, niin kuukaudessa arvioidaan myytävän keskimäärin $72\,000 - 180x$ yksikköä. Millä yksikköhinnalla saataisiin suurin myyntitulo? [mukailtu S1993, 7]

225. Torikauppiaan myymien perunoiden kilohinta x vaihteli 2,10 eurosta 4,50 euroon. Perunoiden myyntimäärä riippui tällöin myyntihinnasta funktion $q(x) = 140 - 15{,}9x$ mukaisesti. Millä välillä torikauppiaan perunan myynnistä saamat tulot vaihtelevat?

226. Postimyyntiä harjoittava yritys oli todennut erään tuotteen menekin q riippuvan myyntihinnasta p seuraavasti: $q(p) = 8000 - 235p$. Liike osti tätä tuotetta 18 €:n kappalehintaan. Kuinka suuri myyntihinta tuotteelle on asetettava, jotta siitä saatava bruttovoitto (= myynti – ostot) olisi mahdollisimman suuri?

E2 227. Kun leipomo asettaa sämpylän hinnaksi 0,40 €, sämpylöitä myydään päivässä 1200 kappaletta. Aina kun hintaa nostetaan 0,10 €, päivämyynti laskee 200 kappaleella. Millä yksikköhinnalla sämpylä on myytävä, jotta päivän myyntitulo olisi mahdollisimman suuri?

228. Joulun jälkeen alkavissa alennusmyynneissä liike pudotti tuotteen hintaa 10 € joka päivä. Samaan aikaan tuotteen myynti kasvoi 50 kappaleella joka päivä. Ensimmäisenä alennusmyyntipäivänä tuotetta myytiin hintaan 120 €, jolloin kappalemääräinen myynti oli 200.
a) Kuinka monentena päivänä saatiin paras myyntitulo?
b) Laske myyntitulon suurin arvo.

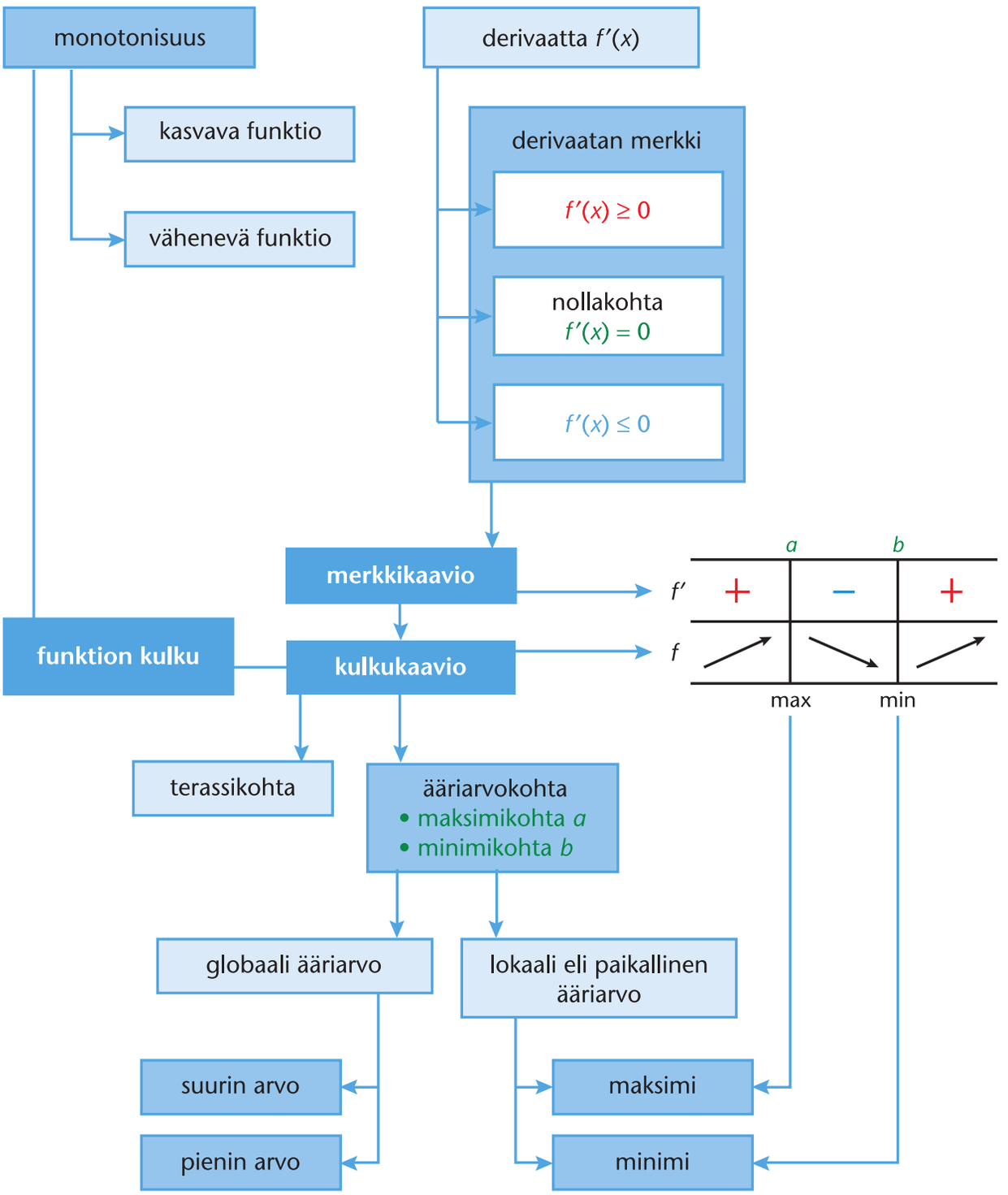
229. Puhelinmyyntiä harjoittavan yrityksen palkkalistoilla oli 24 henkilöä. Puhelinmyyjän keskimääräinen tuotto yritykselle kuukaudessa oli 6500 €. Lisätessään myyjien määrää johto havaitsi, että jokainen lisämyyjä alensi myyjäkohtaista tuottoa 200 € kuukaudessa.
a) Kuinka monta myyjää yrityksen kannattaa pitää palkkalistoillaan, jotta kuukauden myyntitulo olisi mahdollisimman suuri?
b) Laske myyntitulon suurin arvo.

230. Ranskanleipää myytiin päivittäin keskimäärin 200 kappaletta hintaan 1,20 €. Kauppias havaitsi, että leivän myynti lisääntyi keskimäärin 10 leipää jokaista 0,10 €:n alennusta kohden. Myynti vastaavasti aleni 10 leipää jokaista 0,10 €:n korotusta kohti. Millä leivän hinnalla kauppias sai suurimmat voitot, jos kauppias itse oli maksanut leivästä 0,90 €?

231. Urheiluliike myy mainostamiaan lenkkitossuja 25 paria päivässä hintaan 35,00 €/pari. Jokainen euron korotus hinnassa laskee päivämyyntiä yhdellä tossuparilla. Mainoskustannuksia kertyy 0,30 €/pari. Kuinka suuri myyntihinta lenkkitossuille olisi asetettava, että liikkeen saama voitto olisi suurin?

232. Kalakauppias havaitsi pitkän aikavälin tilastoinnin perusteella, että jokainen 0,05 €:n alennus ohjekilohintaan lisäsi savusiian myyntiä keskimäärin 3 kg päivässä. Vastaavasti jokainen 0,1 € korotus OVH:aan vähensi myyntiä 2 kg päivässä. Mikä kauppiaan kannatti laittaa kalan kilohinnaksi, että voitto olisi mahdollisimman suuri? OVH:lla 13,20 €/kg myynti oli keskimäärin 120 kg/päivä. Kalan sisäänostohinta oli 10 €/kg. [Preli, K2003]

Keskeisiä käsitteitä



4 Kertausosa

Polynomifunktio

- **Ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x) = kx + b$**
  - kuvaaja on nouseva suora, kun $k > 0$
  - kuvaaja on laskeva suora, kun $k < 0$
  - kuvaaja on x-akselin suuntainen suora, kun $k = 0$
  - kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0, b)$.

- **Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$**
  - kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, kun $a > 0$
  - kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, kun $a < 0$
  - kuvaajan huippukohta eli huipun x-koordinaatti on nollakohtien puolivälissä.

1. Määritä funktion f nollakohdat, kun
   a) $f(x) = -\frac{3}{4}x - 12$ b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

2. Onko funktion g kuvaaja ylös- vai alaspäin aukeava paraabeli, kun
   a) $g(x) = 3x^2 - x - 1$ b) $g(x) = -x - x^2$?

3. Missä kohdassa funktio leikkaa x-akselin?
   a) $f(x) = -x + 5$ b) $g(x) = 4x^2 - 11x + 6$

4. Piirrä funktion kuvaaja. Onko piste $(-1, 3)$ kuvaajalla?
   a) $f(x) = -x - \frac{4x+1}{2}$ b) $g(x) = 4x^2 - 1$

5. Missä pisteissä funktio f leikkaa koordinaattiakselit, kun
   a) $f(x) = \frac{x-1}{4} + x$ b) $f(x) = (x-1)(-3x+2)$?

Polynomifunktion merkki

- **Lukusuoran välit** voidaan merkitä joko epäyhtälömerkinnän tai välimerkinnän avulla.
  - $x \in [a, b]$ eli $a \le x \le b$
  - $x \in]a, b[$ eli $a < x < b$
  - $x \in [a, b[$ eli $a \le x < b$
  - $x \in [-\infty, 1]$ eli $x \le 1$
  - $x \in]-2, \infty[$ eli $x > -2$

6. Kirjoita välimerkinnät epäyhtälöiden avulla, kun muuttuja x kuuluu välille
   a) $[0, 3]$ b) $[-5, 15[$
   c) $]0{,}2; \infty[$ d) $]-\infty, 12]$.

7. Kirjoita epäyhtälöt hakasulkumerkinnän avulla.
   a) $1 < x < 8$ b) $26 < x \le 30$
   c) $x \ge -4$

- **Ensimmäisen asteen epäyhtälö voidaan ratkaista:**

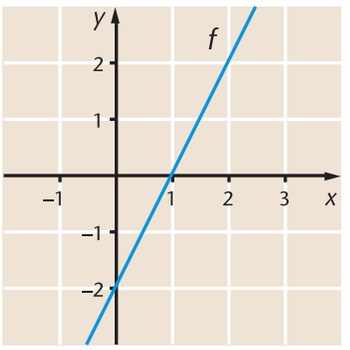
  Tapa 1
  Kuvaajan avulla.

  Tapa 2
  Kuten vastaava yhtälö. Huomaa: negatiivisella luvulla kertominen tai jakaminen muuttaa epäyhtälömerkin suunnan.

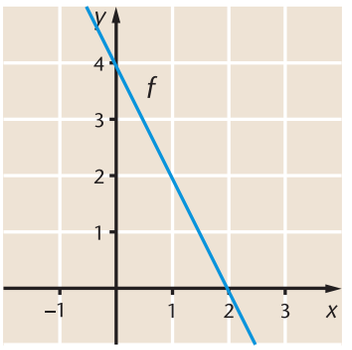
- **Toisen asteen epäyhtälön ratkaisu:**
  1) Laske funktion nollakohdat.
  2) Hahmottele funktion kuvaaja.
  3) Päättele ratkaisu kuvaajan avulla.

8. Ratkaise epäyhtälö $f(x) \geq 0$ kuvaajan avulla.

a)

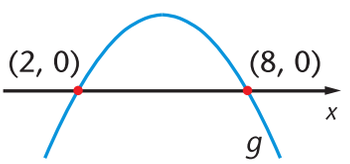


b)

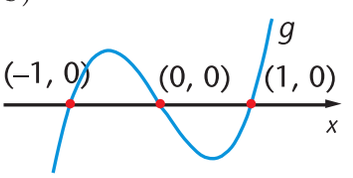


9. Päättele kuvaajan avulla, milloin $g(x) < 0$.

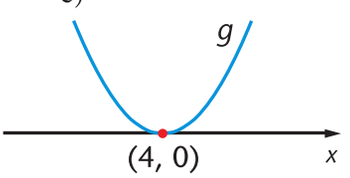
a)



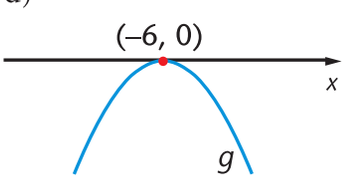
b)



c)



d)



10. Ratkaise epäyhtälö ilman kuvaajaa.
    a) $-2(4x-3) < x-(3x-2)$
    b) $3x-\frac{2x}{3} \geq \frac{2x+5}{2}$

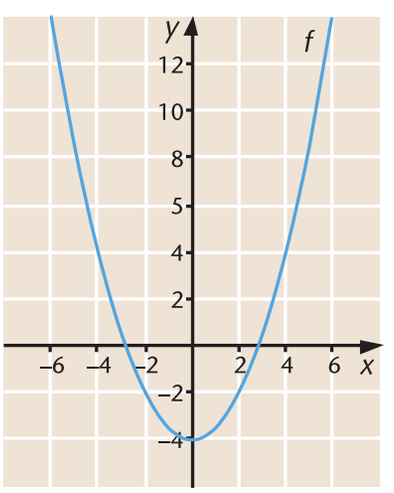
11. Ratkaise epäyhtälö.
    a) $x^2-3x+2 \leq 0$ b) $x > 5x^2$

12. Ratkaise epäyhtälö $(x-1)^2 > 1$. [S1987, 2b]

Funktion muutosnopeus

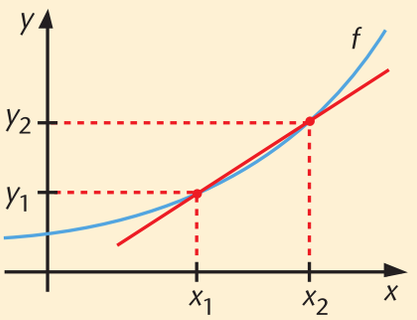
- **Muutosnopeutta** voidaan arvioida suorien avulla käyttäen hyödyksi suoran kulmakerrointa.

13. Arvioi kuvaajan avulla funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä
    a) $[0, 2]$
    b) $[2, 4]$
    c) $[-4, 4]$.



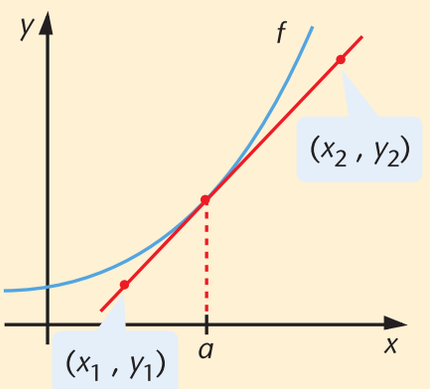
- **Keskimääräinen muutosnopeus** välillä $[x_1, x_2]$ on

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

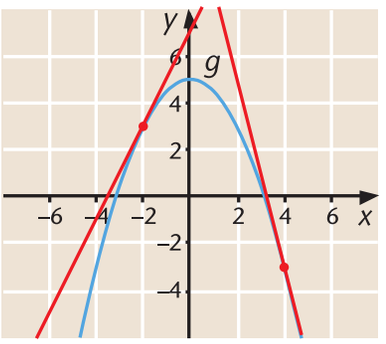


- **Funktion hetkellinen muutosnopeus** kohdassa $x = a$ on tangentin kulmakerroin k.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



14. Arvioi kuvaajan avulla funktion g hetkellinen muutosnopeus kohdassa
a) $x = -2$ b) $x = 4$.



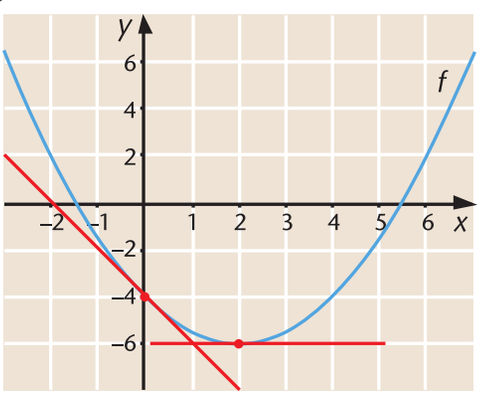
15. Arvioi tehtävän 13 kuvaajan perusteella, missä kohdassa funktion f hetkellinen muutosnopeus on sama kuin välillä
a) $[0, 2]$ b) $[-4, 4]$.

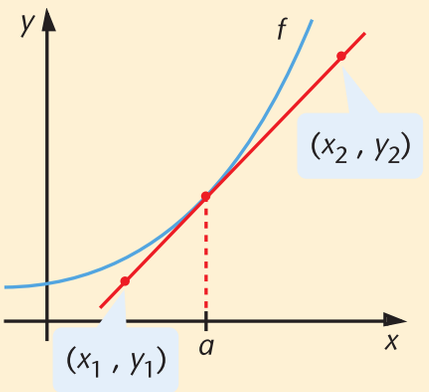
Funktion derivaatta

- **Funktion f derivaatta** kohdassa $x = a$ eli $f'(a)$on funktion hetkellinen muutosnopeus kyseisessä kohdassa.

- Kun derivaatta määritetään graafisesti
1) piirretään tangentti pisteeseen, jossa derivaatta halutaan määrittää
2) valitaan tangenttisuoralta kaksi pistettä
3) lasketaan tangentin kulmakerroin.

16. Määritä kuvaajan perusteella $f(0)$, $f'(0)$, $f(2)$ ja $f'(2)$.





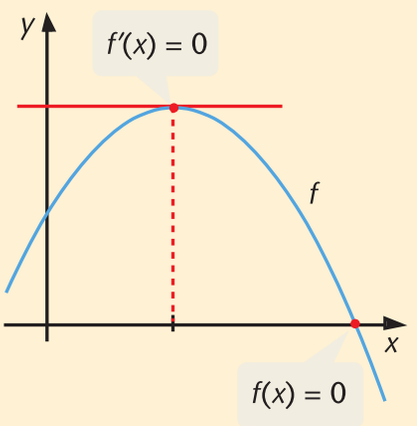
- Kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin k on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

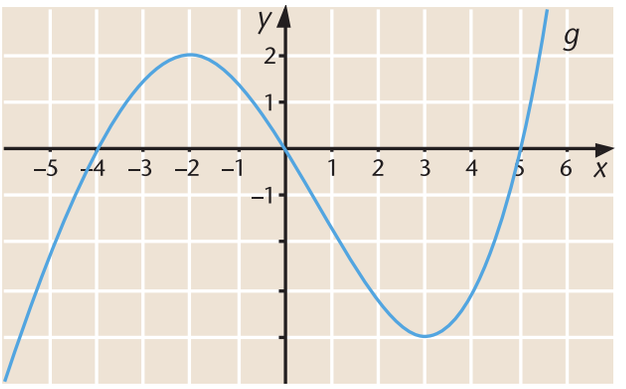
Tällöin funktion f derivaatta f' kohdassa $x = a$ on

$$f'(a) = k$$

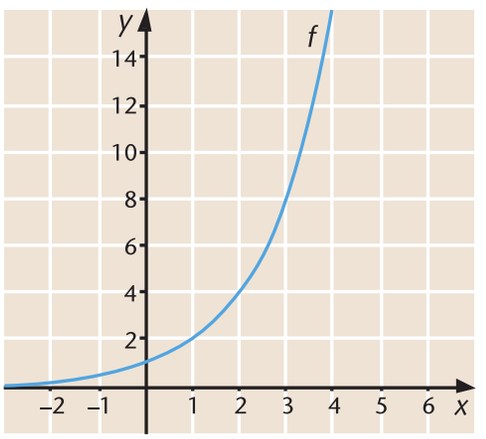
- **Derivaatan nollakohdassa** tangentin kulmakerroin on nolla. Tangentti on siis x-akselin suuntainen suora.



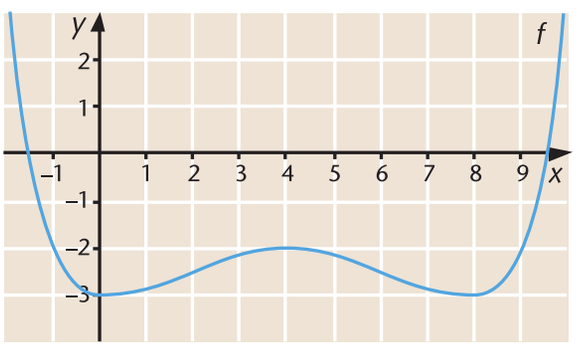
17. Kuvassa on erään polynomifunktion g kuvaaja.
    a) Määritä graafisesti $f'(-4)$.
    b) Missä muissa kohdissa derivaatalla on sama arvo kuin kohdassa $x = -4$?



18. Määritä graafisesti funktion f derivaatan arvo kohdassa $x = 1$ ja $x = 3$.



19. Arvioi funktion g kuvaajan perusteella funktion g
    a) nollakohdat
    b) derivaatan nollakohdat.



Derivoimissääntöjä ja -kaavoja

- **Vakiofunktion $f(x) = k$** derivaatta

  $f'(x) = \mathrm{D}k = 0$

- **Ensimmäisen asteen funktion $f(x) = ax$** derivaatta

  $f'(x) = \mathrm{D}(ax) = a$

- **Potenssifunktion $f(x) = x^n$** derivaatta

  $f'(x) = \mathrm{D}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

- **Vakiokertoimisen funktion** derivointi

  $\mathrm{D}(kf) = k\mathrm{D}f$

- **Summan** derivointi

  $\mathrm{D}(f + g) = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g$

20. Derivoi.
    a) -4 b) $5x$ c) x^4
    d) $-3x + 12$ e) $-4x^7$ f) $x^2 + 6x$

21. Määritä funktion f derivaatta, kun
    a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 7$ b) $f(t) = 3t(4t - 1)$
    c) $f(a) = (6 - 5a)^2$ d) $f(x) = \dfrac{9x^3 - 6x}{3}$.

22. Laske $Q(-2)$ ja $Q'(-2)$, kun
    $Q(x) = x^3(x - 1) + x(x - 2)(x + 2)$.

23. Olkoon $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ ja $g(x) = -6x^2 - 2x - 5$. Osoita, että myös näille funktioille on voimassa sääntö $\mathrm{D}(f + g) = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g$. (Ohje: määritä ensin yhtälön molemmat puolet erikseen ja vertaa niitä toisiinsa.)

Derivaatan arvo

- Kun lasketaan **derivaatan arvo kohdassa** $x = a$, derivaatan lausekkeeseen sijoitetaan muuttujan paikalle haluttu luku a eli lasketaan $f'(a)$

- Kun lasketaan, **missä kohdassa derivaatta saa arvon b,** ratkaistaan yhtälö $f'(x) = b$.

- Derivaatan nollakohtien määrittäminen:
  1) Derivoi funktio.
  2) Ratkaise yhtälö $f'(x) = 0$.

24. Määritä $f'(2)$, kun
    a) $f(x) = 3x - 1$ b) $f(x) = 4x^3 - \dfrac{3x}{2}$

25. Määritä funktion f derivaatan nollakohdat, kun
    a) $f(x) = 5x^2 - 4x$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x$.

26. Määritä vakio t siten, että funktion $f(x) = -x^2 + tx - 2$ derivaatan nollakohta on $x = \dfrac{3}{2}$.

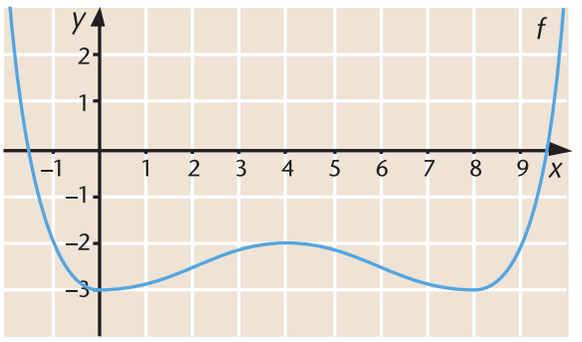
27. Millä x:n arvoilla $f'(x) = 0$, kun
    $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$?

28. Laske funktion $f(x) = -3x^2 + 18x - 3$ huippupiste.

Derivaatan merkki

- Funktion f derivaatan merkki riippuu **derivaatan nollakohdista**.
  - Nollakohtien avulla hahmotellaan derivaatan **kuvaaja** tai laaditaan derivaatan **merkkikaavio**.
  - **Derivaatta on negatiivinen**, kun $f'(x) < 0$.
  - **Derivaatta on positiivinen**, kun $f'(x) > 0$.

29. Määritä kuvaajan avulla, milloin funktion f derivaatta on
    a) nolla
    b) positiivinen
    c) negatiivinen.



30. Ratkaise epäyhtälö $g'(x) > 0$, kun $g(x) = -3x^2 + 18x - 3$.

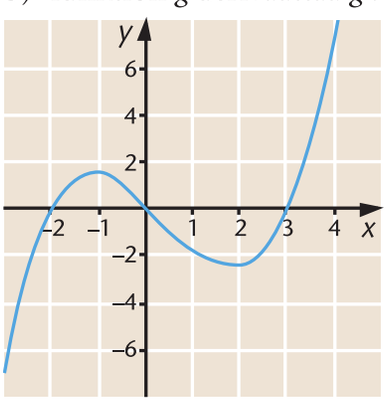
31. Ratkaise epäyhtälö $g'(x) \leq 0$, kun $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$.

32. Osoita, että funktion $f(x) = x^3 + x^2 + 3x$ derivaatta ei saa koskaan negatiivisia arvoja.

Funktion kulku

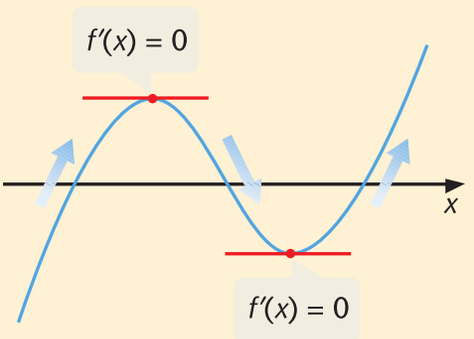
- **Funktion monotonisuudella** tarkoitetaan sen kasvamista ja vähenemistä.
- **Kasvavan funktion** arvot kasvavat (tai pysyvät samana) muuttujan arvojen kasvaessa. Funktio f on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.
- **Vähenevän** funktion arvot pienenevät (tai pysyvät samana) muuttujan arvojen kasvaessa. Funktio f on vähenevä, kun $f'(x) \leq 0$.

33. Päättele kuvaajan avulla, milloin funktio g on kasvava, kun kuvaaja esittää
    a) funktiota g
    b) funktion g derivaattaa g'.

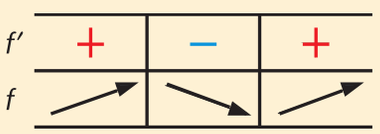


34. Funktion f derivaatta on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $t = -1$ tai $t = 3$. Laadi funktion f kulkukaavio. Milloin f on kasvava?

- **Funktion kulkusuunta** voi vaihtua vain derivaatan nollakohdissa. Näin ollen funktion kulun tutkimiseksi on ensin ratkaistava derivaatan nollakohdat.



- Laaditaan derivaatan **merkkikaavio** ja sen perusteella funktion **kulkukaavio**.



35. Laadi funktion $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ kulkukaavio ja piirrä sitten funktion kuvaaja välillä $[-7, 2]$ kulkukaaviota apuna käyttäen.

36. Päättele funktion kulkukaaviota apuna käyttäen, kumpi arvoista, $f(-4{,}999)$ vai $f(-4{,}998)$, on suurempi, kun $f(x) = 0{,}5x^2 + 5x - 2$.

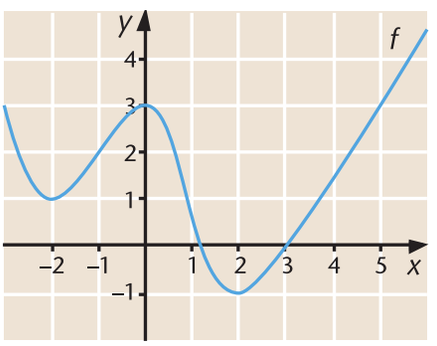
Funktion ääriarvot

- **Maksimikohdassa** funktio saa suurimman arvonsa kohdan lähiympäristössä. Tätä funktion arvoa kutsutaan **maksimiksi**.

- **Minimikohdassa** funktio saa pienimmän arvonsa kohdan lähiympäristössä. Tätä funktion arvoa kutsutaan **minimiksi**.

- Maksimi- ja minimiarvoja kutsutaan funktion **paikallisiksi ääriarvoiksi**. Kohtia, joissa ne saadaan, kutsutaan **ääriarvokohdiksi**.

37. Määritä kuvaajan avulla funktion f ääriarvokohdat sekä ääriarvot.



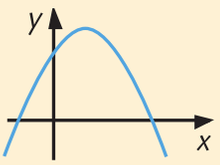
38. Määritä funktion g ääriarvot, kun
a) $g(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 2$ b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x$.

39. Määritä vakio a siten, että funktiolla $f(x) = 5x^2 + 2ax + a + 1$ on minimi kohdassa $x = -1$. Laske minimi.

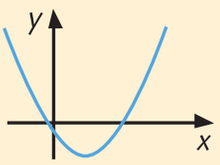
40. Keihäänheittäjän keihään etäisyyttä maanpinnasta metreinä kuvaa funktio $f(x) = -0{,}016x^2 + 1{,}0x + 2{,}0$. Funktio f on määritelty välillä $[0, 64]$. Kuinka korkealla keihäs käy?

- Funktiolla voi olla suurin arvo, pienin arvo tai molemmat, mutta sillä ei välttämättä ole kumpaakaan arvoa.

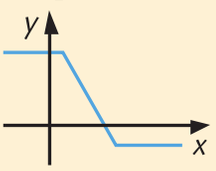
  Funktiolla on suurin arvo, mutta ei pienintä:



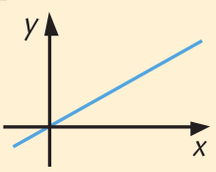
  Funktiolla on pienin arvo, mutta ei suurinta:



  Funktiolla on sekä suurin arvo että pienin arvo:

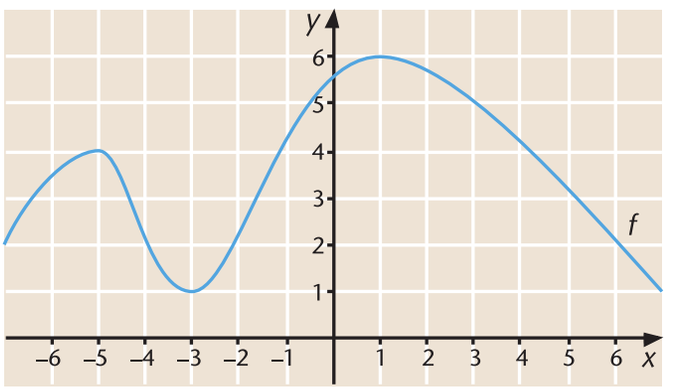


  Funktiolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa:



- Suljetulla välillä polynomifunktiolla on sekä suurin että pienin arvo
  – välin päätepistessä tai
  – derivaatan nollakohdassa.

41. Vastaa kuvaajan avulla kysymyksiin.
    a) Mikä on funktion f suurin arvo välillä $[-7, 7]$? Missä kohtaa funktio saa sen?
    b) Määritä funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-7, -2]$.
    c) Missä kohtaa funktio f saa suurimman arvonsa välillä $[-4, -1]$? Entä pienimmän arvonsa?
    d) Anna esimerkki välistä, jossa funktion suurin arvo on 6 ja pienin arvo on 5.

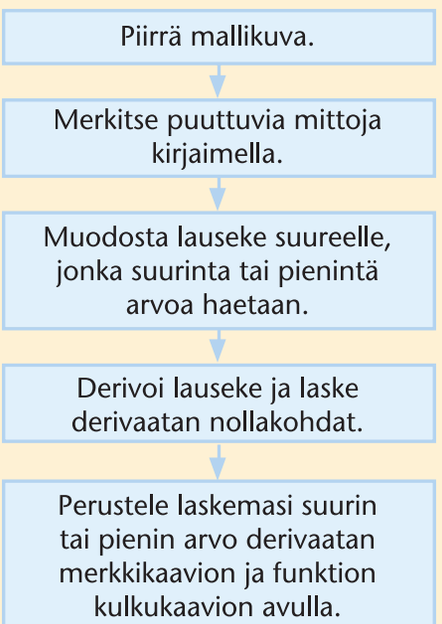


42. Määritä funktion $f(x) = 2x^2 - 8x - 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-5, 3]$.

43. Alkoholia nauttivan henkilön veren alkoholipitoisuus p promilleina muuttui ajan t (tunteja juomisen aloittamisesta) funktiona seuraavasti: $p(t) = -0{,}0875t^2 + 0{,}7t$.
    a) Millä välillä funktio p on määritelty?
    b) Mikä on henkilön veren suurin alkoholipitoisuus edellä määritellyllä välillä? Kuinka monen tunnin kuluttua juomisen aloittamisesta se saavutetaan?

Derivaatan geometrisia sovelluksia

- Geometrian sovelluksissa etsitään usein optimaalisinta pinta-alaa tai tilavuutta. Tehtävän ratkaisussa kannattaa edetä seuraavasti:



44. Perheen koiralle rakennetaan suorakulmion muotoinen aitaus, jonka yhtenä sivuna on talon seinä. Kolmeen muuhun sivuun on käytettävissä 22 m verkkoaitaa. Miten aitauksen pituus ja leveys on valittava, jotta aitauksen ala olisi mahdollisimman suuri?

45. Suorakulmaisen särmiön pohja on neliön muotoinen. Särmien yhteispituus on 56,0 cm. Määritä särmiön suurin mahdollinen tilavuus.

46. Tarun mukaan kuningatar Dido sai ostaa maa-alueen, jonka hän naudan vuodalla pystyisi rajaamaan. Dido leikkasi vuodan ohuiksi suikaleiksi ja sitoi nauhat yhteen. Sitten hän ympäröi nauhalla alueen, jolle hän perusti Karthagon kaupungin. Oletetaan, että naudan vuota olisi ollut suorakulmion muotoinen ja sen mitat olisivat olleet 2,5 m × 2,0 m. Tästä leikattiin 2 mm:n levyisiä ja 2,5 m:n pituisia nauhoja. Koska Karthago sijaitsi meren rannalla, yhtä sivuista ei tarvinnut rajata. Jos Dido olisi rajannut suorakulmion muotoisen alueen, miten alueen mitat olisi pitänyt valita, jotta sen ala olisi ollut mahdollisimman suuri? Mikä olisi Karthagon pinta-ala tällöin ollut? Nauhojen solmimiseen kuluvaa pituutta ei tarvitse ottaa huomioon.

Derivaatan sovelluksia talouselämästä

- Talouselämän sovellukset liittyvät usein suurimman myyntitulon tai voiton määrittämiseen.

- Myyntituloa tai myyntivoittoa kuvaava funktion muodostetaan seuraavasti:

myynti-tulo	=	kappale-hinta	·	määrä
myynti-voitto	=	kappale-hinta – kappale-kustannukset	·	määrä

47. Tuotteen myyntitulo vuorokaudessa m (€) riippuu tuotteen hinnasta siten, että $m(x) = 320x - 5x^2$, $x \in [28, 36]$. Mikä on suurin mahdollinen myyntitulo? Millä hinnalla se saadaan?

48. Elokuvateatterissa havaittiin, että katsojamäärä viikossa riippui elokuvalipun hinnasta. Kun lipun hinta oli keskimäärin 8,00 €, katsojia kävi viikon aikana keskimäärin 650. Jokainen 0,50 euron korotus lipun hinnassa vähensi katsojamäärää 50 henkilöllä viikossa. Millä lipun hinnalla viikon myyntitulo olisi suurin?

1. Harjoituskoe

1. a) Määritä paraabelin aukeamissuunta, kun $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$.
   b) Määritä funktioiden f ja g nollakohdat, kun $f(x) = -5x - 3$ ja $g(x) = 2x^2 - 8$.
   c) Missä pisteissä funktiot f ja g leikkaavat y-akselin, kun $f(x) = 3x - 1$ ja $g(x) = -x^2 - 6$?
   d) Laske funktioiden f ja g arvot kohdassa $x = -1$, kun $f(x) = -x + 2$ ja $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

2. Piirrä funktio $f(x) = x - \frac{3x-4}{2}$ kuvaaja. kuuluuko piste $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ kuvaajalle?

3. Hahmottele funktion $f(x) = -2x^2 + x + 1$ kuvaaja ja ratkaise, milloin $f(x) \geq 0$. Mikä on huippupiste?

4. Suorakulmaisen, tasakylkisen kolmion piiri on 24 cm. Merkitään kolmion hypotenuusan pituutta kirjaimella x.
   a) Lausu kateettien pituudet kirjaimen x avulla.
   b) Määrittele kolmion pinta-alan lauseke.

5. Laske funktion f derivaatta.
   a) $f(x) = 4x$
   b) $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 9$
   c) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$
   d) $f(x) = \frac{8x^5 - 4x^3 + x^2}{2}$

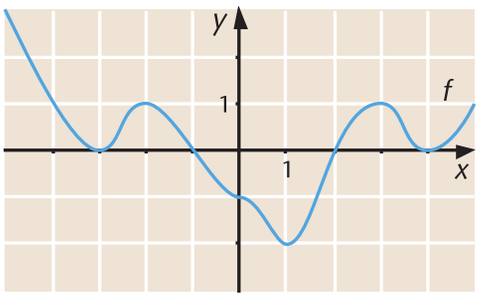
6. Olkoon $g(t) = 2t^2 + 6t - 16$.
   a) Millä muuttujan t arvoilla funktio g on kasvava?
   b) Laske $g(-3)$ ja $g'(-3)$. Kerro lyhyesti, mitä nämä arvot funktion kuvaajan kannalta tarkoittavat.

7. Määritä funktion $g(t) = 2t^3 + 6t^2 - 1$ ääriarvot. Onko funktiolla suurinta arvoa?

8. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$ suurin ja pienin arvo välillä $[-5, 1]$.

2. Harjoituskoe

1. Määritä kuvaajan perusteella
   a) funktion arvot $f(0)$ ja $f(-2)$
   b) funktion nollakohdat
   c) derivaatan nollakohdat
   d) funktion pienin arvo, kun $-5 \le x \le 5$
   e) funktion suurin arvo, kun $-1 \le x \le 2$.



2. Ratkaise epäyhtälö.
   a) $6(x+2) < 8x+14$ b) $x^2 - x - 12 \ge 0$

3. Derivoi.
   a) $f(t) = -t^4 + \frac{3}{5}t^3 - t + 2$
   b) $g(r) = -(2r^2 + 6)$
   c) $h(x) = (x+3)(-x^3 + 6x)$

4. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ ääriarvot. Milloin funktio on kasvava?

5. Määritä vakion a arvo siten, että paraabelin $y = 4ax^2 - 24x + 8$ huippupiste on $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$.

6. Työmaalla on suoran ympyräkartion muotoinen hiekkakasa, jonka sivujanan pituus on 2,5 m. Kuinka suuri kasan korkeus on silloin, kun kasan tilavuus on suurimmillaan? Kuinka paljon hiekkaa kasassa tällöin on?

7. Pihan nurkkaan rakennetaan koiralle suorakulmion muotoinen aitaus. Pihan ympärillä oleva pensasaita rajaa aitausta kahdelta sivulta, jolloin aitaa täytyy rakentaa vain kahdelle muulle sivulle. Aitatarvikkeita on varattu 10 metrin mittaista aitaa varten. Toiselle aidattavalle sivulle jätetään lisäksi metrin verran aitaamatonta tilaa porttia varten. Laske suurimman mahdollisen aitauksen pinta-ala.

3. Harjoituskoe

1. a) Ratkaise epäyhtälö $5x + 3(x - 2) > 10x - 2$.
   b) Määritä funktion $f(x) = 8x - 7x^2$ derivaatta kohdassa $x = -1$ ja derivaatan nollakohta.

2. a) Millä välillä funktio $f(x) = -4x^3 + 18x^2 - 24x + 2$ on kasvava?
   b) Tutki, milloin funktiot $f(x) = 4 - x^2$ ja $h(x) = 8x^3 - 18x^2 - 24x + 6$ ovat molemmat vähe-neviä.

3. Omakotitalon tontilla kulkevan puron yli rakennetaan pieni kaarisilta, joka on funktion $f(x) = -x^2 + 2{,}25x - 0{,}875$ kuvaajan x-akselin yläpuolisen osan muotoinen. Koordinaatiston yksikkönä on metri.
   a) Jos kaarisilta alkaa aivan puron reunalta ja loppuu aivan puron toiselle reunalle, kuinka leveä puro on?
   b) Kuinka korkealla vedenpinnasta sillan korkein kohta on, jos veden pinta kulkee pitkin x-akselia?

4. Laske funktion $f(x) = 4x^2 - 8x$ suurin ja pienin arvo välillä
   a) $[0, 3]$ b) $[4, \infty[$.

5. Reetta suunnittelee suorakulmion muotoista peiliä, jonka sivuille tulevat 3,0 cm leveät kehykset ja ylös sekä alas 2,0 cm leveät kehykset. Kehystetyn peilin piirin pituuden tulee olla 95 cm. Mitkä ovat peililasin mitat ilman kehyksiä, jotta peilin pinta-ala olisi mahdollisim-man suuri?

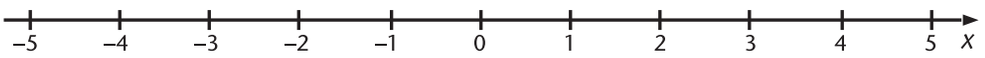
6. Erästä designtuotetta valmistetaan alle 120 kappaletta. Kokonaiskustannusten (€) riip-puvuutta valmistusmäärästä x kuvaa funktio $f(x) = 500 + 4x + 0{,}2x^2$. Yritys myy tuotetta 50 euron kappalehintaan. Laske tuotteen myynnistä saatava suurin mahdollinen voitto.

7. Riina valmistaa laatikon, jonka suorakulmion muotoisen pohjan piirin pituus on 80 cm. Valmiin laatikon korkeus on 10 cm. Pystyykö Riina valmistamaan näillä ehdoilla laatikon, johon mahtuu 3,5 litraa hiekkaa?

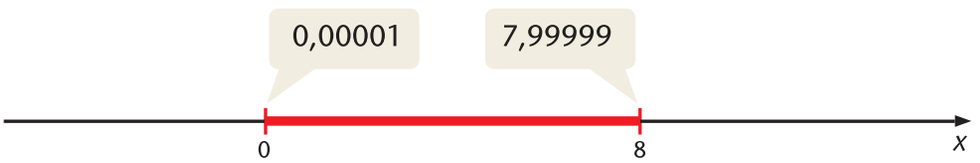
5 Ekstrat

Lukusuoran välit

Reaalilukujen joukko **R** sisältää luonnollisten lukujen, kokonaislukujen ja rationaalilukujen lisäksi irrationaaliluvut. Reaalilukuja voidaan havainnollistaa lukusuoran avulla. Lukusuoran kaikki pisteet kuuluvat reaalilukujen joukkoon.



Tarkastellaan esimerkiksi lukujen 0 ja 8 väliin jäävien lukujen joukkoa. Pienikin osa lukusuoraa sisältää äärettömän monta pistettä. Lukujen 0 ja 8 väliin jäävään lukujoukkoon kuuluvat esimerkiksi luvut 0,000 01 ja 7,999 99. Välin päätepisteet 0 ja 8 eivät kuulu tarkasteltavaan lukujoukkoon.



Sellaista lukusuoran väliä, johon välin päätepisteet eivät kuulu, sanotaan **avoimeksi väliksi**. Väliä voidaan havainnollistaa piirtämällä se lukusuoralle, tai se voidaan merkitä joko hakasulkumerkinnän tai epäyhtälömerkinnän avulla.

Avoin väli

Välin päätepisteet 0 ja 8 eivät kuulu joukkoon.

Lukusuoraesitys

Avoimet pallot tarkoittavat, että päätepisteet eivät kuulu mukaan.

Hakasulkumerkintä $x \in \,]0, 8[$

Epäyhtälömerkintä $0 < x < 8$

Lue: *x* kuuluu avoimelle välille nollasta kahdeksaan.

Sellaista lukusuoran väliä, johon välin päätepisteet kuuluvat, sanotaan **suljetuksi väliksi**.

Jos väli sisältää vain toisen päätepisteensä, sitä kutsutaan **puoliavoimeksi väliksi**.

Puoliavoin väli

Päätepisteistä joko 0 tai 8 kuuluu joukkoon.

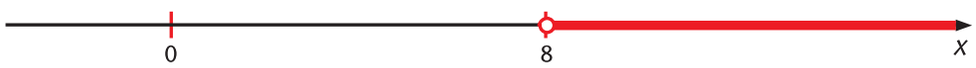
Päätepisteistä 0 ei kuulu ja 8 kuuluu joukkoon.

$x \in \,]0, 8]$

Lue: x kuuluu puoliavoimelle välille nollasta kahdeksaan.

$0 < x \leq 8$

Väli voi olla rajoitettu vain toisesta päästä. Tällainen on esimerkiksi niiden lukujen joukko, jotka ovat suurempia kuin luku 8. Ylärajaksi merkitään tällöin ”ääretön”, jonka symboli on ∞. Ääretön ei koskaan kuulu mihinkään reaalilukujoukkoon.



$x \in \,]8, \infty[$ tai $x > 8$

	Lukusuoraesitys	Epäyhtälömerkintä	Hakasulkumerkintä
Suljettu väli		$-3 \leq x \leq 7$	$x \in [-3, 7]$
Puoliavoin väli		$-3 < x \leq 7$	$x \in \,]-3, 7]$
Avoin väli		$-3 < x < 7$	$x \in \,]-3, 7[$
Rajoittamaton väli		$x \leq 7$	$x \in \,]-\infty, 7]$
		$x > -3$	$x \in \,]-3, \infty[$

Esimerkki 1 Määritä yhtälön ratkaisuista ne, jotka ovat suljetulla välillä $[-2, 3]$.

a) $2x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x^2 - x - 5 = 0$

Ratkaisu

a) Ratkaistaan yhtälö toisen asteen ratkaisukaavalla.

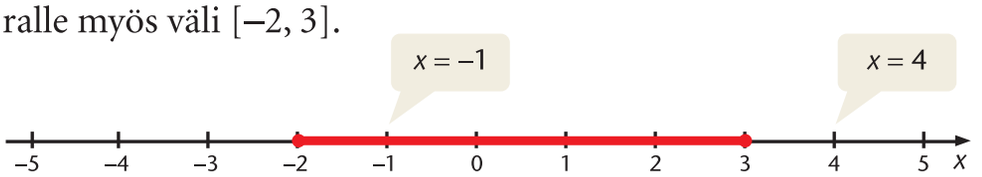
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{4}$$

$$x = \frac{6 \pm 10}{4}$$

$$x = \frac{6+10}{4} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{6-10}{4} = -1$$

Sijoitetaan yhtälön ratkaisut lukusuoralle. Merkitään lukusuoralle myös väli $[-2, 3]$.



Ratkaisuista vain $x = -1$ kuuluu suljetulle välille $[-2, 3]$.

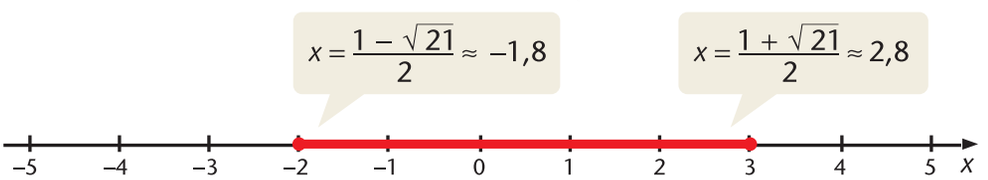
b) Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

Lasketaan ratkaisujen likiarvot ja sijoitetaan yhtälön ratkaisut lukusuoralle. Merkitään lukusuoralle myös väli $[-2, 3]$.



Koska $\frac{1+\sqrt{21}}{2} \approx -1{,}8 > -2$, ratkaisu kuluu tarkasteltavalle välille.

Koska $\frac{1-\sqrt{21}}{2} \approx 2{,}8 < 3$, ratkaisu kuuluu tarkasteltavalle välille.

Molemmat ratkaisut kuuluvat suljetulle välille $[-2, 3]$.

Vastaus a) $x = -1$ b) $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ ja $x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$

Tehtäviä

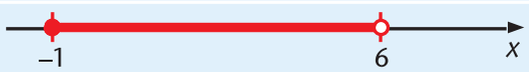
1. Kirjoita epäyhtälöiden avulla, että muuttuja x kuuluu välille
   a) $[-3, 9]$ b) $]0, 2[$ c) $]-1, 3]$.

2. Kirjoita epäyhtälöiden avulla, että muuttuja x kuuluu välille
   a) $]-\infty, 12]$ b) $[1, \infty[$ c) $]-4, \infty[$.

3. Kirjoita hakasulkumerkintöjen avulla, että
   a) $2 \le x \le 20$ b) $-5 < x < 0$ c) $8 \le x < 10$.

4. Kirjoita hakasulkumerkintöjen avulla, että
   a) $x \le 3$ b) $x < -5$ c) $x \ge 27$.

5. Täydennä taulukkoon puuttuvat tiedot.

Lukusuoraesitys	Epäyhtälö-merkintä	Hakasulku-merkintä
	$x > -3$	
		$x \in]-11, 13[$
		
		$x \in]2, 9]$

6. Ilmoita epäyhtälönä.
   a) $x \in [0, 6]$ b) $x \in]-\infty, -1]$
   c) $x \in]-5, \infty[$ d) $x \in [-10, 8[$

7. Ilmoita hakasulkumerkintänä.
   a) $4 \le x \le 6$ b) $x > -3$ c) $x \ge 1$ d) $8 < x \le 30$

8. Mitkä yhtälön $x^2 + x - 6 = 0$ ratkaisuista ovat välillä $[0, 3]$?

9. Mitkä yhtälön $-3x^2 + 2x + 7 = 0$ ratkaisuista kuuluvat välille $[-1, 2]$?

10. Määritä yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ ne ratkaisut, jotka kuuluvat avoimeen väliin $\left]-1, \frac{3}{2}\right[$. [K1998, 1]

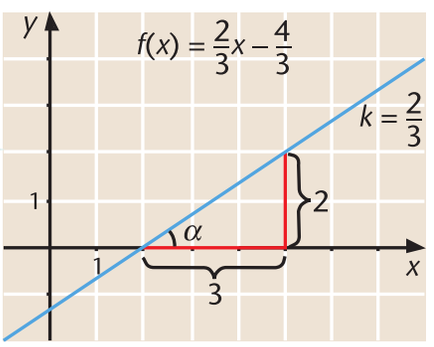
11. Määritä yhtälön $2500x^2 + 625x + 39 = 0$ ratkaisuista ne, jotka kuuluvat välille $\left[-\frac{1}{7}, -\frac{1}{8}\right]$.

Suuntakulma

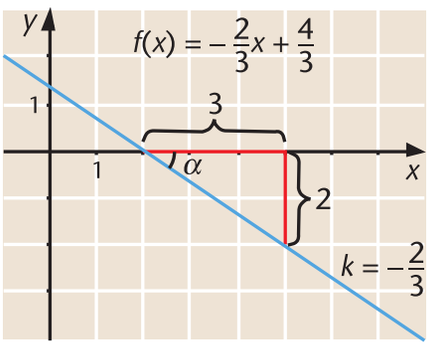
Suoran kulmakerroin kertoo suoran kulkusuunnan lisäksi suoran jyrkkyyden.

Toinen tapa ilmaista suoran jyrkkyys on **suuntakulma**. Suuntakulmalla tarkoitetaan sitä terävää kulmaa, jonka suora muodostaa positiivisen x-akselin kanssa. Suuntakulma saadaan kulmakertoimen avulla.

Nousevilla suorilla suuntakulma on positiivinen ja laskevilla suorilla negatiivinen.



$$\tan\alpha = \frac{2}{3}$$
$$\alpha = 33{,}69...^\circ \approx 34^\circ$$



$$\tan\alpha = -\frac{2}{3}$$
$$\alpha = -33{,}69...^\circ \approx -34^\circ$$

ESIMERKKI 1

Tarkastellaan neljää eri suoraa.

suora *A* Suoran kulmakerroin on –5.	**suora *B*** Suoran yhtälö on muotoa $y = 2x - 6$.
suora *C* Suoran suuntakulma on 45°.	**suora *D*** Suoran suuntakulma on –30°.

a) Mitkä suorista ovat nousevia, mitkä laskevia?
b) Mikä suorista laskee jyrkimmin?
c) Mikä suorista nousee jyrkimmin?

RATKAISU

Vertailun helpottamiseksi lasketaan kaikkien suorien suuntakulmat.

suora *A* Suoran kulmakerroin on –5.	**suora *B*** Suoran yhtälö on muotoa $y = 2x - 6$.
	Kulmakerroin on 2.
$\tan\alpha_A = -5$ $\alpha_A = -78{,}69...^\circ$	$\tan\alpha_B = 2$ $\alpha_B = 63{,}43...^\circ$

suora *C*	**suora *D***
Suoran suuntakulma on 45°.	Suoran suuntakulma on −30°.
$\alpha_C = 45°$	$\alpha_D = -30°$

a) Laskevia suoria ovat ne suorat, joiden suuntakulma on negatiivinen. Laskevia suoria ovat *A* ja *D*.

Nousevien suorien suuntakulma on positiivinen. Nousevia suoria ovat *B* ja *C*.

b) Mitä pienempi on laskevan suoran suuntakulma, sitä jyrkemmin suora laskee. Laskevista suorista jyrkin on *A*.

c) Mitä suurempi on nousevan suoran suuntakulma, sitä jyrkemmin suora nousee. Nousevista suorista jyrkin on *B*.

VASTAUS

a) Laskevia suoria ovat *A* ja *D*. Nousevia suoria ovat *B* ja *C*.
b) Laskevista suorista jyrkin on *A*.
c) Nousevista suorista jyrkin on *B*.

Tehtäviä

12. Laske suoran suuntakulma asteen tarkkuudella.

a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b) $y = -\frac{3}{4}x - 5$

c) $y = 2x + 1$ d) $y = -3x + 2$

13. Määritä suoran suuntakulma yhden desimaalin tarkkuudella.

a) $y = 0{,}2x - 3$ b) $y = 2 - 5x$

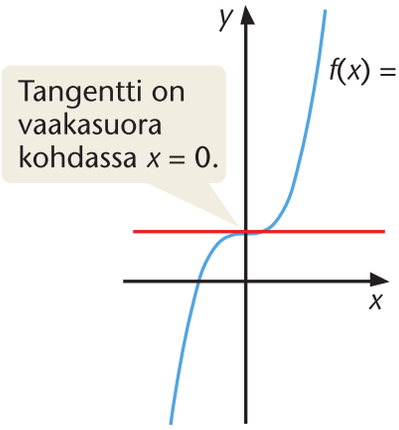
14. Salla rakentaa köynnöskasville tuen. Hän piirtää mallikuvan, jossa on neljä suoraa *A*, *B*, *C* ja *D*. Suoran *A* suuntakulma on −63° ja suoran *B* suuntakulma on 43°. Suoran *C* kulmakerroin on $\frac{10}{11}$ ja suoran *D* kulmakerroin on −1,7.

a) Mikä suorista nousee jyrkimmin?
b) Mikä suorista laskee jyrkimmin

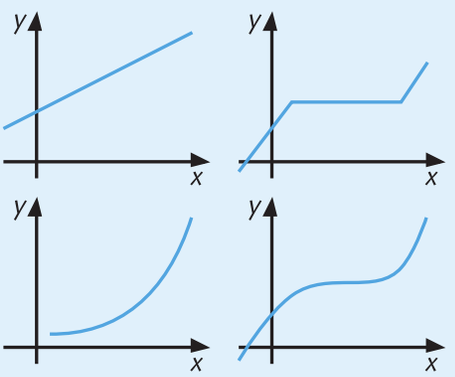
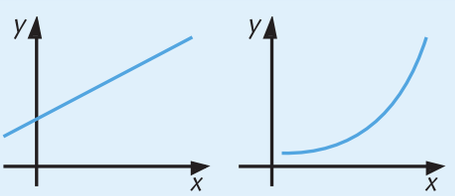
15. Määritä suorien $y = -2x$, $y = 0{,}2x - 2$ ja $y = -\frac{2}{3}x - 1$ suuntakulmat kahden desimaalin tarkkuudella. Mitkä suorista ovat nousevia, mitkä laskevia?

Aidosti monotoniset funktiot

Aidosti kasvavan funktion kohdalla funktion arvot kasvavat koko ajan muuttujan arvojen kasvaessa ja derivaatta on positiivinen luku. Aidosti kasvavankin funktion derivaatta voi saada arvon nolla yksittäisessä pisteessä.



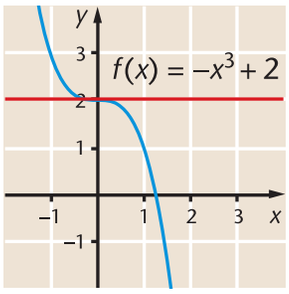
Esimerkiksi funktio $f(x) = x^3 + 1$ on aidosti kasvava, vaikka kohtaan $x = 0$ piirretty tangentti onkin vaakasuora. Derivaatalla on siis yksi nollakohta, vaikka funktio on aidosti kasvava.

	Määritelmä	Esimerkkejä
Kasvava funktio	Funktio on kasvava, jos muuttujan arvon kasvaessa **funktion arvot kasvavat tai pysyvät samana.**	
Aidosti kasvava funktio	Funktio on aidosti kasvava, jos muuttujan arvon kasvaessa **funktion arvot kasvavat.**	

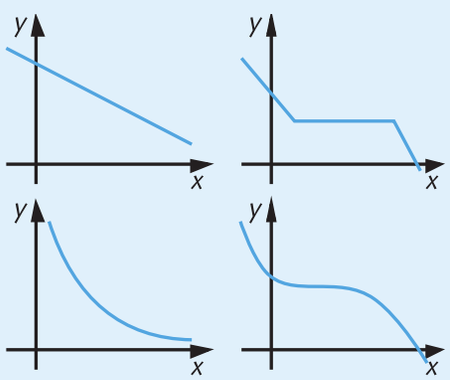
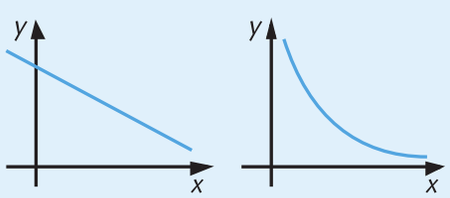
Kasvavat funktiot

- Jos funktion f derivaatta $f'(x) \geq 0$, niin f on kasvava.
- Jos funktion f derivaatta $f'(x) > 0$, niin f on aidosti kasvava. Lisäksi derivaatta voi saada arvon nolla yksittäisissä pisteissä.

Aidosti vähenevän funktion derivaatta on negatiivinen; yksittäisessä pisteessä derivaatta voi kuitenkin saada arvon nolla.



Funktio $f(x) = -x^3 + 2$ on aidosti vähenevä, vaikka kohtaan $x = 0$ voidaan piirtää vaakasuora tangentti. Derivaatalla f' on siis yksi nollakohta.

	Määritelmä	**Esimerkkejä**
Vähenevä funktio	Funktio on vähenevä, jos muuttujan arvon kasvaessa **funktion arvot vähenevät tai pysyvät samana.**	
Aidosti vähenevä funktio	Funktio on aidosti vähenevä, jos muuttujan arvon kasvaessa **funktion arvot vähenevät.**	

Vähenevät funktiot

- Jos funktion f derivaatta $f'(x) \leq 0$, niin f on vähenevä.
- Jos funktion f derivaatta $f'(x) < 0$, niin f on aidosti vähenevä. Lisäksi derivaatta voi saada arvon nolla yksittäisissä pisteissä.

Funktion kuvaajan piirtäminen derivaatan avulla

Esimerkki 1 Piirrä funktion $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ kuvaaja.

Ratkaisu

Funktion derivaatan avulla saadaan selville, milloin funktio on kasvava ja milloin vähenevä. Nämä tiedot auttavat funktion kuvaajan piirtämisessä. Ennen piirtämistä täytyy siis tutkia funktion kulkua sivulla 88 esitettyjen vaiheiden (1–3) avulla.

1 Derivoidaan funktio.

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 12 = 6x^2 + 6x - 12$$

2 Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$g'(x) = 0$, kun $6x^2 + 6x - 12 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{12}$$

$$x = \frac{-6 \pm 18}{12}$$

$$x = \frac{-6 + 18}{12} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 - 18}{12} = -2$$

3 Muodostetaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion kulkukaavio.

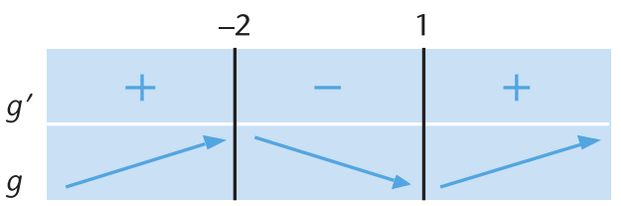
Lasketaan derivaatalle arvoja nollakohtien eri puolilla derivaatan merkkien selvittämiseksi.

$$g'(-4) = 6 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 12 = 60 > 0$$

$$g'(0) = 6 \cdot (0)^2 + 6 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$$

$$g'(2) = 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 12 = 24 > 0$$

Funktion derivaatta: $g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$



Jotta funktion kuvaaja voidaan piirtää riittävän tarkasti kulkukaavion avulla, on laskettava joitakin funktion arvoja. Funktion arvot kannattaa laskea ainakin derivaatan nollakohdissa, koska niissä kohdissa ovat kulkukaavion mukaan kuvaajan huiput.

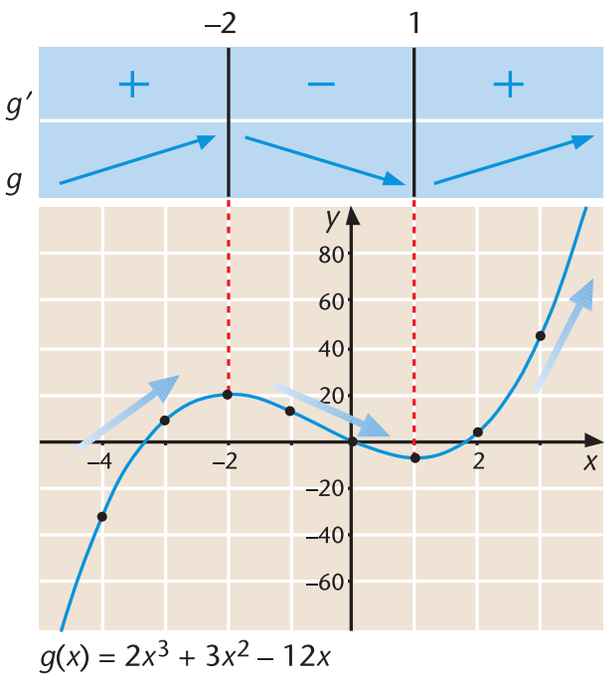
Lasketaan funktion arvoja ja piirretään kuvaaja.

x	$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$	
–4	$2 \cdot (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 12 \cdot (-4) = -32$	
–3	9	
–2	20	(–2, 20)
–1	13	
0	0	
1	–7	(1, –7)
2	4	
3	45	

Derivaatan nollakohdat

Huippupisteet

Merkitään lasketut pisteet koordinaatistoon. Kulkukaavion perusteella piirretään funktion kuvaaja.



$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

Yhtälön likimääräinen ratkaiseminen

Tarkastellaan jatkuvan funktion $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}06x^2 - 3$ kulkua. Funktion f derivaatta on $f'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}12x$.

Derivaatalla on kaksi nollakohtaa.

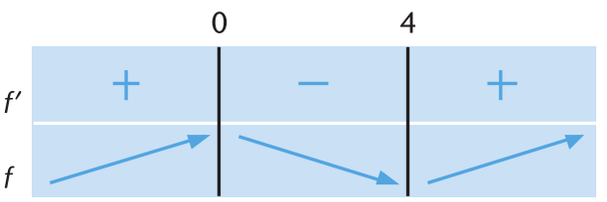
$$0{,}03x^2 - 0{,}12x = 0$$
$$x(0{,}03x - 0{,}12) = 0$$

Tulon nollasääntö.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 0{,}03x - 0{,}12 = 0$$
$$0{,}03x = 0{,}12 \quad | : 0{,}03$$
$$x = 4$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen avulla funktion kulkukaavio.

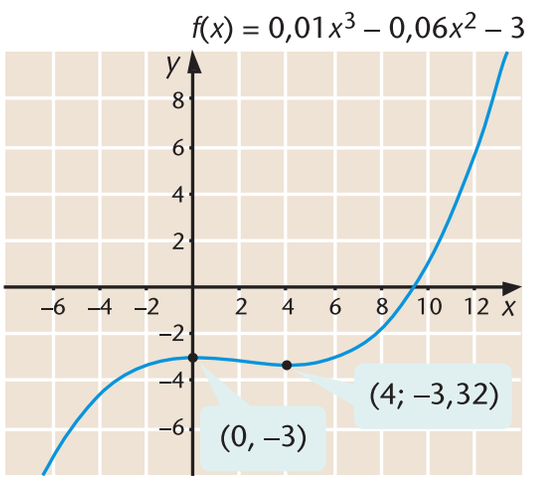
$f'(-1) = 0{,}15 > 0$
$f'(1) = -0{,}09 > 0$
$f'(5) = 0{,}15 > 0$



Lasketaan ääriarvot:

- maksimi $f(0) = -3$
- minimi $f(4) = -3{,}32$.

Piirretään funktion $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}06x^2 - 3$ kuvaaja.



Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä $[8, 10]$.

Lasketaan funktion arvot tämän välin päätepisteissä.

$$f(8) = 0{,}01 \cdot 8^3 - 0{,}06 \cdot 8^2 - 3 = -1{,}72 < 0$$
$$f(10) = 0{,}01 \cdot 10^3 - 0{,}06 \cdot 10^2 - 3 = 1 > 0$$

Koska funktion arvo kohdassa $x = 8$ on negatiivinen, mutta arvo kohdassa $x = 10$ taas positiivinen, täytyy funktion saada arvo 0 jossain välillä $[8, 10]$. Funktiolla on siis yksi nollakohta tällä välillä.

Funktion nollakohdassa

$$f(x) = 0 \quad \text{eli} \quad 0{,}01x^3 - 0{,}06x^2 - 3 = 0$$

Tämän kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti on hankalaa. Yhtälölle voidaan kuitenkin etsiä likimääräinen ratkaisu **haarukoimalla**.

Haarukoinnissa muuttujalle x annetaan testiarvoja ja lasketaan näitä vastaavia funktion arvoja. Tarkoituksena on löytää sellainen muuttujan x arvo, joka toteuttaa yhtälön mahdollisimman tarkasti.

Funktion $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}06x^2 - 3$ arvot välin $[8, 10]$ päätepisteissä ovat

$$f(8) = -1{,}72 < 0 \quad \text{ja} \quad f(10) = 1 > 0$$

Lasketaan välin päätepisteiden keskiarvo eli puolitetaan väli.

$$\frac{8+10}{2} = 9$$

Tämä on uusi muuttujan testiarvo. Lasketaan funktion arvo tällä testiarvolla.

$$f(9) = 0{,}01 \cdot 9^3 - 0{,}06 \cdot 9^2 - 3 = -0{,}57 < 0$$

Muuttujan arvo $x = 9$ on uuden tarkasteltavan välin toinen päätepiste. Toiseksi päätepisteeksi valitaan se testiarvo, jossa funktio saa erimerkkisen arvon kuin kohdassa $x = 9$.

Tarkasteltava väli on nyt $[9, 10]$. $f(9) < 0$, $f(10) > 0$

Kavennetaan väliä puolittamalla sitä, kunnes saadaan vastaus halutulla tarkkuudella.

Testiarvo	Funktion $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}06x^2 - 3$ arvo	Tarkasteltava väli
$\frac{9+10}{2} = 9{,}5$	$0{,}01 \cdot 9{,}5^3 - 0{,}06 \cdot 9{,}5^2 - 3 = 0{,}15\ldots > 0$	$[9; 9{,}5]$
9,25	$0{,}01 \cdot 9{,}25^3 - 0{,}06 \cdot 9{,}25^2 - 3 = -0{,}21\ldots < 0$	$[9{,}25; 9{,}5]$
9,375	$0{,}01 \cdot 9{,}375^3 - 0{,}06 \cdot 9{,}375^2 - 3 = -0{,}03\ldots < 0$	$[9{,}375; 9{,}5]$
9,4375	$0{,}01 \cdot 9{,}4375^3 - 0{,}06 \cdot 9{,}4375^2 - 3 = 0{,}06\ldots > 0$	$[9{,}375; 9{,}4375]$

Tarkasteltava väli on nyt [9,375; 9,4375]. Kummankin välin päätepisteen likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella on 9,4. Tällöin voidaan todeta, että funktion $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}06x^2 - 3$ nollakohta yhden desimaalin tarkkuudella on $x \approx 9{,}4$.

Haarukointi

1. Valitse tarkasteltava väli. Käytä tarvittaessa apuna funktion kuvaajaa (sekä derivaatan merkkikaaviota ja funktion kulkukaaviota).
2. Laske funktion arvot välin päätepisteissä.
3. Laske uusi testipiste välin päätepisteiden avulla.
4. Laske funktion arvo uudella testipisteellä.
5. Muodosta uusi tarkasteltava väli. Huom. Välin päätepisteissä funktio saa erimerkkiset arvot.
6. Laske uusi testipiste ja määritä uusi tarkasteltava väli.
7. Jatka kunnes kaikki arvot tarkasteltavalla välillä pyöristyvät samaan lukuarvoon halutulla tarkkuudella.

Tehtäviä

16. Yhtälöllä $-x^3 + 8x + 1 = 0$ on kolme ratkaisua, joista yksi on välillä $[-3, -2]$. Määritä se kahden desimaalin tarkkuudella.

17. Osoita, että funktiolla $f(x) = 0{,}2x^3 - x - 10$ on yksi nollakohta. Ratkaise nollakohta yhden desimaalin tarkkuudella

18. Perustele, miksi polynomifunktiolla $f(x) = x^3 - 4x - 2$ on yksi nollakohta välillä $]2, 3[$. Etsi haarukoimalla tämä nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella. [K2000, 11]

19. Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden $y = x^3$ ja $y = (x-1)^2$ kuvaajat. Lue kuviosta, millä x:n arvolla käyrät leikkaavat toisensa. Tarkenna laskemalla yhtälön $x^3 = (x-1)^2$ juuren likiarvoa 0,01:n tarkkuuteen. [S1994, 10a]

Derivaatan fysikaaliset sovellukset

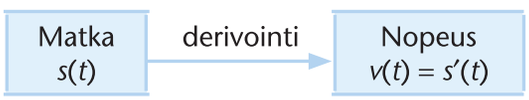
Differentiaalilaskenta keskittyy funktion tutkimiseen derivaatan avulla. Sen kehittämisen yhtenä lähtökohtana olivat kappaleiden liiketilaan liittyvät perusprobleemat.

- Miten kappale liikkuu? Onko liike tasaista?
- Millä nopeudella kappale liikkuu? Pysyykö nopeus samana?
- Mikä on kappaleen kiihtyvyys?

Onkin luonnollista, että luonnontieteistä juuri fysiikka hyödyntää derivaattaa eniten.

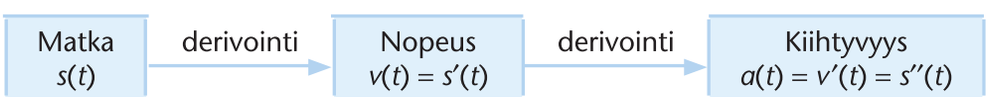
Matka, aika, nopeus

Jos kappaleen kulkema matka ajan t funktiona on s, niin kappaleen nopeus hetkellä t on matkan derivaatta $s'(t)$.



Vastaavasti hetkellinen kiihtyvyys a saadaan derivoimalla nopeutta kuvaava funktio.

Kiihtyvyys saadaan siis, kun kappaleen kulkemaa matkaa kuvaava funktio derivoidaan kahteen kertaan. Kiihtyvyys on matkan **toinen derivaatta**.



Esimerkki 1

Kappaleen kulkemaa matkaa metreinä kuvaa funktio $s(t) = -1{,}6t^3 + 5{,}3t^2 + 10{,}6t$, jossa t on aika sekunteina.

a) Kuinka kaukana lähtöpisteestä kappale on 1,5 sekunnin kuluttua?

b) Laske kappaleen nopeus 1,5 sekunnin kuluttua lähtöhetkestä.

c) Laske kappaleen kiihtyvyys 3,5 sekunnin kuluttua lähtöhetkestä.

Ratkaisu

a) Kappaleen kulkema matka 1,5 sekunnin aikana on

$$\begin{aligned} s(1{,}5) &= -1{,}6 \cdot 1{,}5^3 + 5{,}3 \cdot 1{,}5^2 + 10{,}6 \cdot 1{,}5 \\ &= 22{,}425 \\ &\approx 22 \text{ (m)} \end{aligned}$$

b) Nopeus saadaan, kun derivoidaan matkaa kuvaava funktio $s(t)$.

$$\begin{aligned} s'(t) &= -3 \cdot 1{,}6t^2 + 2 \cdot 5{,}3t + 10{,}6 \\ &= -4{,}8t^2 + 10{,}6t + 10{,}6 \end{aligned}$$

Nopeus ajan funktiona on

$$v(t) = -4{,}8t^2 + 10{,}6t + 10{,}6$$

Nopeus 1,5 s kuluttua on

$$v(1{,}5) = -4{,}8 \cdot (1{,}5)^2 + 10{,}6 \cdot 1{,}5 + 10{,}6 = 15{,}7 \approx 16 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

c) Kiihtyvyys saadaan, kun derivoidaan nopeus $v(t) = -4{,}8t^2 + 10{,}6t + 10{,}6$.

$$v'(t) = -4{,}8 \cdot 2t + 10{,}6 = -9{,}6t + 10{,}6$$

Kiihtyvyys ajan funktiona on

$$a(t) = -9{,}6t + 10{,}6$$

Kiihtyvyys 3,5 s kuluttua on

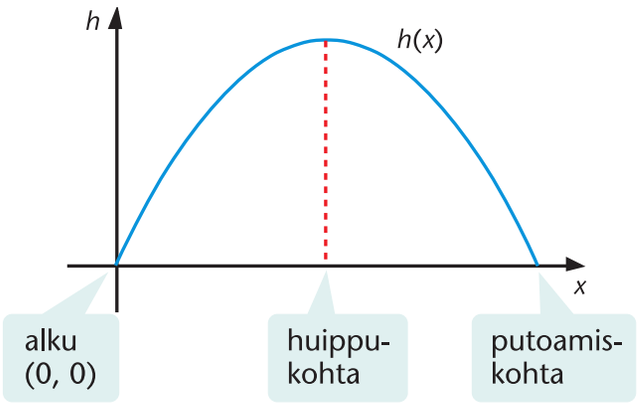
$$a(3{,}5) = -9{,}6 \cdot 3{,}5 + 10{,}6 = -23 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

Vastaus

a) 22 m b) $16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ c) $-23 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

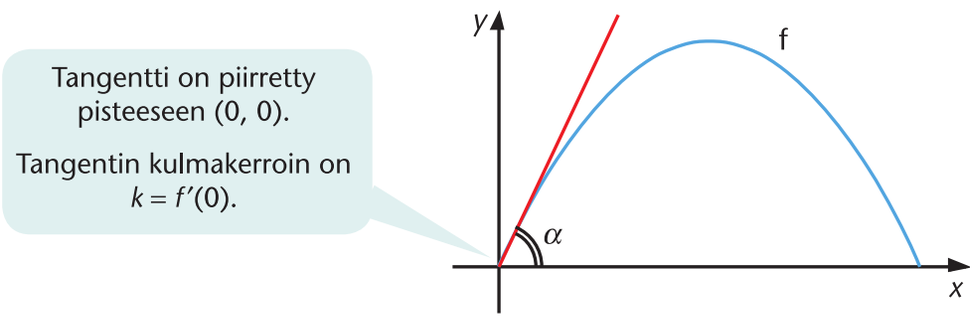
Heittoliike

Heittoliikettä voidaan kuvata esimerkiksi koordinaatistossa, jossa vaaka-akselilla kuvataan vaakasuoraa etenemää x ja pystyakselilla heiton korkeutta h. Heittoliikettä kuvaa tällöin funktio $h(x)$.



Heittoliikkeen voidaan ajatella alkavan esimerkiksi origosta. Huippukohta ja putoamiskohta määräytyvät tämän valinnan mukaan. Heittoliikkeen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Heittokulmalla tarkoitetaan heiton lähtöpisteeseen piirretyn tangentin ja x-akselin välistä suuntakulmaa α.

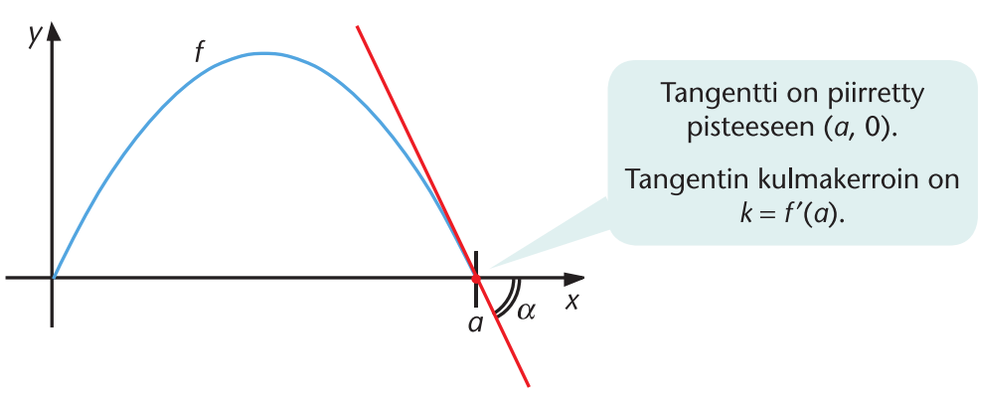


Suuntakulma saadaan laskettua tangentin kulmakertoimen k avulla.

$$k = \tan \alpha$$

Tangentin kulmakerroin k saadaan funktion derivaatan avulla. Kulmakerroin k on sama kuin funktion derivaatta kyseisessä kohdassa.

Kulma, jossa heitetty esine osuu maahan, saadaan samalla tavalla putoamiskohtaan piirretyn tangentin avulla.



Esimerkki 2

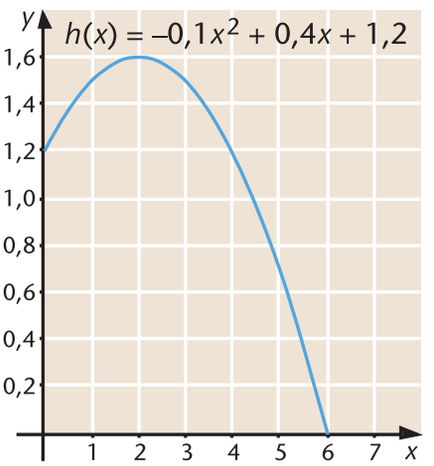
Lasten kesäkisoissa oli yhtenä lajina pallon heitto. Eetun heittämän pallon korkeus maan pinnasta (m) noudatti likimain funktiota $h(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1{,}2$, jossa x on pallon vaakasuora etenemä.

a) Milloin pallo oli heittoradan korkeimmalla kohdalla? Kuinka korkealla pallon oli?

b) Missä kulmassa pallo osui maahan?

Ratkaisu

a) Pallon korkeutta maan pinnasta kuvaavan funktion h kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Funktio saa tällöin suurimman arvonsa huipussa eli derivaatan nollakohdassa.

Funktion h derivaatta on
$h'(x) = -0{,}1 \cdot 2x + 0{,}4 = -0{,}2x + 0{,}4.$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} -0{,}2x + 0{,}4 &= 0 \\ -0{,}2x &= -0{,}4 \quad \vert : (-0{,}2) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Pallo on korkeimmalla kohdalla, kun vaakasuora etenemä on 2,0 m. Pallon korkeus maan pinnasta on tällöin

$$h(2{,}0) = -0{,}1 \cdot 2{,}0^2 + 0{,}4 \cdot 2{,}0 + 1{,}2 = 1{,}6 \text{ (m)}$$

b) Lasketaan ensin, missä kohdassa pallo osuu maahan. Pallo osuu maahan kohdassa, jossa funktion h kuvaaja leikkaa x-akselin eli funktion h nollakohdassa.

Lasketaan funktion h nollakohdat.

$$-0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1{,}2 = 0$$

$$x = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{0{,}4^2 - 4 \cdot (-0{,}1) \cdot 1{,}2}}{2 \cdot (-0{,}1)}$$

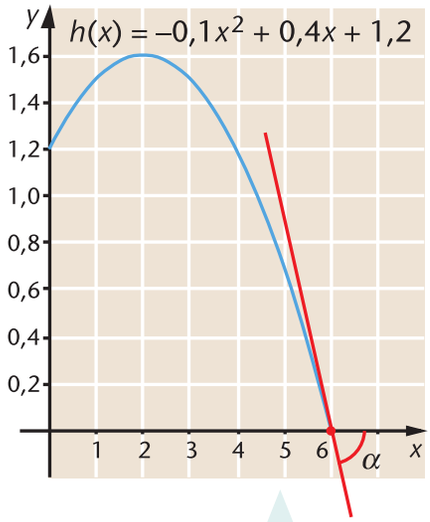
$$x = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{0{,}64}}{-0{,}2}$$

$$x = \frac{-0{,}4 \pm 0{,}8}{-0{,}2}$$

$$x = \frac{-0{,}4 + 0{,}8}{-0{,}2} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-0{,}4 - 0{,}8}{-0{,}2} = 6$$

Kun pallo osuu maahan, pallon vaakasuora etenemä on positiivinen, joten ratkaisuista kelpaa $x = 6$.

Kulma, jossa pallo osuu maahan, saadaan nollakohtaan $x = 6$ piirretyn tangentin kulmakertoimen avulla.



Tangentin kulmakerroin on sama kuin funktion derivaatan arvo kyseisessä kohdassa. Funktion derivaatta kohdassa $x = 6$ on

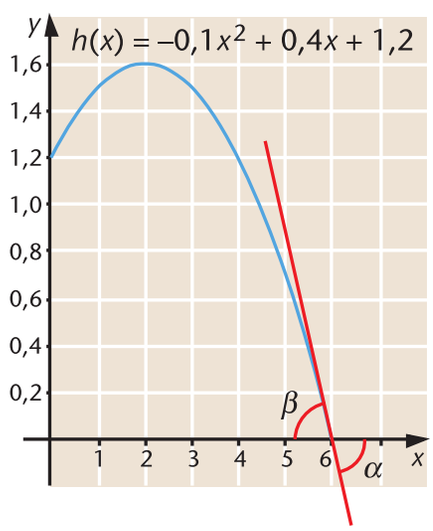
$$h'(6) = -0{,}2 \cdot 6 + 0{,}4 = -0{,}8$$

Lasketaan tangenttisuoran suuntakulma.

$$\tan\alpha = -0{,}8$$
$$\alpha = -38{,}65...^\circ$$

Suoran suuntakulma muodostuu aina positiivisen x-akselin kanssa.

Kulma, jossa pallo osuu maahan, on kuvaan merkitty kulma β. Kulman β suuruus on sama kuin tangenttisuoran suuntakulman α itseisarvo.



$$\beta = |-38{,}65\ldots^\circ| = 38{,}65\ldots^\circ \approx 39^\circ$$

Pallo osuu maahan 39°:n kulmassa.

VASTAUS

a) Pallo on korkeimmalla kohdalla, kun vaakasuora etenemä on 2,0 m. Pallon korkeus maan pinnasta on tällöin 1,6 m.
b) Pallo osuu maahan 39°:n kulmassa.

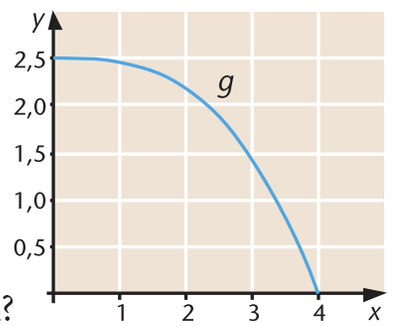
Tehtäviä

20. Kappaleen kulkemaa matkaa (metreinä) suoraviivaisessa liikkeessä esittää funktio $s(t) = 15t - 5t^2$, jossa t on aika sekunteina.
a) Määritä kappaleen kulkema matka 1,0 s kuluttua lähdöstä.
b) Laske kappaleen nopeus 1,0 s kuluttua lähdöstä, kun nopeus $v(t) = s'(t)$.

21. Kappaleen kulkemaa matkaa metreinä kuvaa funktio $s(t) = t^2 + t$, $t \geq 0$. Laske kappaleen
a) alkunopeus b) kiihtyvyys,
kun $t = 4$ s. Ohje: $v(t) = s'(t)$ ja $a(t) = v'(t)$.

22. Polkupyörämatkan pituus on 60 km. Alkumatka, 45 km, ajetaan nopeudella 14 km/h ja loppumatka nopeudella 18 km/h. Määritä funktion $t = t(s)$ lauseke, jossa t on aika (tunteina), joka on käytetty, kun on poljettu matka s, $0 \leq s \leq 60$. Piirrä funktion $t(s)$ kuvaaja. Määritä derivaatta $t'(15)$. [K1996, 8a]

23. Saappaanheiton SM-kilpailuissa erään kilpailijan saappaan lentorata on funktion $g(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}2x + 2{,}5$ kuvaajan x-akselin yläpuolisen osan muotoinen.
a) Missä kulmassa heitto lähtee?
b) Missä kulmassa saapas osuu maahan?



24. Kappaleen nopeutta (m/s) kuvaa funktio $v(t) = t^3 - 2t^2 + 1{,}5t + 1$, $t \geq 0$. Laske kappaleen
a) nopeus kahden sekunnin kuluttua
b) kiihtyvyys kolmen sekunnin kuluttua, kun $a(t) = v'(t)$.

25. Kilpa-auton nopeus v (km/h) riippui aikavälillä [0 s, 10 s] ajasta t(s) seuraavasti:

$$v(t) = \frac{20}{27}t^3 - \frac{140}{9}t^2 + 100t$$

a) Millä hetkellä saavutettiin suurin nopeus? Mikä se oli?
b) Alkukiihdytysten jälkeen auto saapui mutkaan, joten kuljettajan oli laskettava auton nopeutta. Missä kohtaa mutkaa nopeus oli pienimmillään ja kuinka paljon se oli?

Tehtävien vastaukset

1.1 Polynomifunktio

1. a) laskeva suora
   b) nouseva suora
   c) ei laskeva eikä nouseva
2. a) 5 b) $4\frac{1}{3}$ c) 22
3. a) ei ole b) kyllä
4. a) $x = 0$ b) $x = 3$
   c) $x = \frac{5}{4}$
5. a) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ b) $x = -\frac{2}{5}$
6. $(0, -6)$, $(-8, 0)$
7. $(6, 0)$
8. a) ylöspäin
   b) alaspäin
   c) ylöspäin
   d) alaspäin
9. a) $f(x) = -4x^2 + 9$
   b) $f(x) = 6x^2 - 24x$
   c) $f(x) = 16x^2 - 24x + 9$
   d) $f(x) = -4x^2 + 36x - 56$
10. a) $g(x) = 3x^2 - 4x$
    b) $g(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{5}x + 1$
11. a) $3\frac{1}{4}$ b) 0
12. a) $x = 0$ tai $x = 2$
    b) $x = 7$ tai $x = -6$
13. a) $x = -1$ tai $x = 4$
    b) $x = 2$
    c) ei nollakohtia
14. a) $x = \frac{1}{5}$
    b) $x = 0$ tai $x = -16$
    c) ei nollakohtia
15. a) $x = -6$, $x = 5$
    b) $x = -3$, $x = 0$
16. a) $(0, 3)$ b) $(0, -5)$
    c) $(0, 0)$
17. a) ei ole b) kyllä
18. a) $g(-1) = 3$
    b) $h(-1) = -8$
    c) $r(-1) = 6$
19. a) $x = 5$
    b) ei nollakohtia
    c) $x = 1$ tai $x = 2$
20. a) $\left(\frac{1}{15}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{6}\right)$
    b) $(0, 0)$, $(5, 0)$
21. ei leikkauspisteitä

1.2 Polynomifunktion merkki

22. a) $x \geq 2$ b) $x \leq 3$
23. a) $x < 12$ b) $x > -6$
24. –
25. $x < 3$
26. $x > 8$
27. a) $x > 2$ b) $x \geq -4$
28. a) $x \leq -\frac{1}{2}$ b) $x \geq \frac{1}{2}$
29. a) $x < -2$ b) $x < \frac{2}{5}$
30. a) kaikki muuttujan x arvot
    b) ei ratkaisua
31. a) $x > -30$ b) $x \leq \frac{1}{8}$
32. $x > -\frac{1}{3}$
33. $x < \frac{3}{2}$
34. a) $30 - x$
    b) $0 < x < 30$
35. a) $11 - x$
    b) $0 < x < 11$
36. a) $x \leq \frac{1}{5}$ b) $x \leq 3\frac{1}{3}$
37. a) $x \leq 1$ tai $x \geq 8$
    b) $-5 \leq x \leq 1$
38. a) $x = -3$ b) $x \in \mathbf{R}$
39. $x < -4$ tai $0 < x < 6$
40. a) $x \approx -4$, $x \approx 2$ ja $x \approx 4$
    b) $-4 < x < 2$ tai $x > 4$
41. a) $x < -1$ tai $x > 4$
    b) $0{,}4 \leq x \leq 5$
42. a) $-2 \leq x \leq 2$
    b) $x < -5$ tai $x > 10$
43. a) kaikki x:n arvot
    b) ei ratkaisua
44. a) $x = -1$ b) $x \neq 5$
45. a) kaikki x:n arvot
    b) ei ratkaisua
46. $0 < x \leq 2\frac{1}{2}$
47. $5 \leq x \leq 10$
48. a) $x < 3$
    b) $\frac{1}{2} < x < 3$
49. a) $x < -\frac{1}{2}$
    b) $x < 0$ tai $x > 5$
50. a) $x > 6$ b) $x < 1$
51. a) $x \leq -3$ tai $x \geq 3$
    b) ei ratkaisua
52. a) $0 < x < 7{,}5$ (cm)
    b) $4x^2 - 70x + 300$
    c) $2{,}5 < x < 7{,}5$ (cm)

1.3 Funktion muutosnopeus

53. a) noin 75 km
    b) noin 100 km/h
    c) noin 15 min
    d) noin 45 min
54. a) $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$
    b) 20 km
    c) $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$
    d) noin $53\frac{\text{km}}{\text{h}}$
55. a) f
    b) muutosnopeudet yhtä suuret
56. a) 0,25 b) –1 c) 0
57. a) $\frac{2}{3}$ b) 1 c) $-\frac{2}{3}$

58. a) 26°C b) $0{,}5\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$
c) $0{,}7\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$

59. a) g b) h
c) g ja h

60. a) $x \approx -0$
b) $x \approx -2{,}2$ tai $x \approx 1$

61. a) 0 b) 2

62. a) $x \approx -1$ b) $x \approx -1{,}5$

63. a) 2 km
b) noin 15 min
c) noin 5 km/h
d) 4 km

64. a) 0 b) 2 c) -4
d) kohdassa $x = -2$ noin -10 ja kohdassa $x = 3$ noin 10

65. a) -2 b) $x \approx 2$
c) pienempi

66. a) $-0{,}7\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$ b) $0{,}4\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$
c) $0\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$ d) $-0{,}7\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$

2.1 Funktion derivaatta

67. a) $f(4) \approx 16$
b) $f'(4) \approx 8$
c) $f(2) \approx 4$
d) $f'(2) \approx 4$

68. a) 2 b) 1
c) -1 d) 7

69. a) -4 b) 4

70. $f'(1) \approx -2$

71. a) $f'(1) \approx 0$
b) $f'(2) \approx 2$

72. a) $f(2) = 5$, $f'(2) = 0$
b) $f(2) \approx 5{,}5$; $f'(2) \approx 3$

73. $f(3) = -1$, $f'(3) = 0$

74. –

75. –

76. a) -1 b) $x \approx 7$

77. a) $g(2) \approx -3$, $g'(2) \approx 2$
b) $x \approx -2{,}5$ ja $x \approx -9$
c) $x \approx -8{,}5$

78. $f'(0) \approx 1$
myös $f'(-1) = f'(1) \approx 1$

79. a) $f'(x) = 0$, kun $x \approx -1$;
$f(x) = 0$, kun $x \approx -5$ tai $x \approx 3$
b) $f'(x) = 0$, kun $x \approx -0{,}5$ tai $x \approx 3$;
$f(x) = 0$, kun $x \approx -2$ tai $x \approx 2$ tai $x \approx 4$

80. b, c, e, f, i

81. –

82. nollakohdat $-4{,}3$; $-3{,}3$; 0; 3,3; 4,3; $f'(x_1) \approx 0{,}9$

83. a) $f(0) \approx 1$
b) $f'(0) \approx -5$
c) $f(2) \approx -1$
d) $f'(2) \approx 3$

84. a) $g(-1) \approx -3$
b) $g'(-1) \approx 2$
c) $x \approx 4$ tai $x \approx 0$
d) $x \approx -2$

85. $f'(1) \approx -1$

86. a) $g(5) \approx -1$, $g'(5) \approx 3$
b) $x \approx -3{,}5$ tai $x \approx 1{,}5$
c) $x \approx -3$

2.2 Derivoimissääntöjä ja -kaavoja

87. a) 0 b) $-4{,}3$
c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{1}{3}$

88. a) $3x^2$ b) $-12x^2$
c) $3t^4$ d) $4{,}2r^6$

89. a) $-15x^2$ b) $6x - 1$
c) $\frac{2}{3}$

90. a) $f'(x) = 10$
b) $f'(x) = -9r^2$
c) $f'(x) = -21x^2 - 5$
d) $f'(t) = -t + \frac{1}{3}$

91. a) $f'(x) = -3x^2 + 4$
b) $f'(x) = 24x$
c) $f'(x) = -15x^4 + 1{,}2x^3 - 10x$
d) $f'(x) = -14r^5$

92. a) $33x^{10} + 4$
b) $-15b^2$
c) $-24x^7 - 12x^2 + 2x$
d) $-7 - x$

93. a) $-2x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}$
b) $4x^3 + 4$
c) $\frac{6}{5}x - \frac{4}{5}$
d) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$

94. a) $40x^3 + 30x$
b) $2x - 10$
c) $12x^3 + 2x - 2$
d) $-2x + 4$

95. a) $g'(x) = 8x$
b) $g'(x) = 6x^2 + 12x$
c) $g'(t) = 2t - 6$
d) $g'(r) = 2r$

96. a) $m'(t) = -\frac{1}{3}$
b) $h'(x) = \frac{1}{5}$
c) $g'(x) = 10x^4 - 12x^2$
d) $f'(r) = -10r^4 + 2r - 8$

97. $f(x) = \frac{25}{9}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{16}{9}$
$f'(x) = \frac{50}{9}x - \frac{40}{9}$

98. $k(2) = -47\frac{2}{3}$
$k'(2) = -96$

99. $m(-1) = -7$
$m'(-1) = -4$

100. $P(-2) = 12$
$P'(-2) = 7$

101. $\frac{9}{16}$

102. a) $h'(x) = -2x^4 - 1$
b) $n'(r) = 20r^{19} - 10{,}2r^2$
c) $f'(t) = 15t^{14} + 32t^3 - t^2$
d) $f'(x) = -\frac{1}{6}$

103. a) $4x + 10$
b) $4x + 4$
c) $8x - 4$
d) $-6x^2 + 26x$

104. a) $\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}$
b) $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$

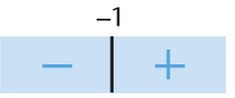
105. a) $f(4) = 45$, $f'(4) = 24$
b) $f(4) = -15$, $f'(4) = -11$

2.3 Derivaatan arvo

106. a) 9 b) $x = 3$
107. a) 55
b) $x = -2$ tai $x = 3\frac{1}{3}$
108. $t = 3$
109. $x = 0$
110. a) $x \approx 2$
b) $x \approx -1$ tai $x \approx 2$
111. $g(x) = 0$, kun $x \approx 0$ tai $x \approx 6$; $g'(x) = 0$, kun $x \approx 3$
112. $x \approx -2$ tai $x \approx 2$
113. $x \approx -1$ tai $x \approx 5$
114. $x = \frac{1}{2}$
115. $(-2, 6)$ ja $(2, -6)$
116. $x = -1$ b) $x = 0$
117. a) $x = \frac{3}{4}$
b) $x = -10$ tai $x = 8$
118. a) $x = -1$ tai $x = 8$
b) $x = -5$ tai $x = 2$
119. a) $x = 4$
b) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 4$
120. $x = 3$ ja $x = -\frac{7}{3}$
121. a) $x = -1$
b) $x = \frac{1}{3}$ tai $x = 1$
122. $(2, 2)$
123. a) 3 b) -69
124. $k = \frac{1}{2}$
125. $a = -4$
126. 1,7 m
127. 2,35 m
128. $a = 63$
129. a) 56
b) $x = -1$ tai $x = 1\frac{2}{3}$
130. a) $x = 6$ b) $x = -2\frac{1}{2}$
131. a) $x = \frac{3}{2}$
b) $x = 4$ tai $x = -\frac{1}{3}$
132. $(3, 5)$
133. 18 m

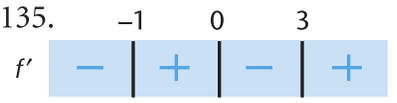
2.4 Derivaatan merkki

134. a)



b)

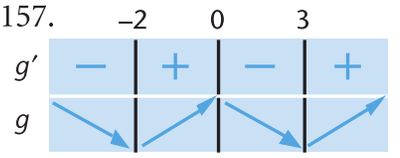
135.



$x < -1$ tai $0 < x < 3$
136. a) $x < 2$ tai $x > 4$
b) $x \neq 1$
137. a) $-5 < x < -3$
b) $x < 5$ tai $x > -3$
138. a) $x < 2$ b) $x > \frac{11}{4}$
139. $x < -1$ tai $x > 3$
140. $x < -6$ tai $x > 1$
141. a) $x \geq -3$
b) $x \leq 0$ tai $x \geq 6$
142. $-2 < t < 2$
143. $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$
144. $\frac{3}{10} < x < \frac{9}{5}$
145. –
146. –
147. $a = \frac{5}{4}$, $x > -2$
148. a) $x < -3$ tai $x > 0$
b) $-3 < x < 0$
149. a) $x = 3\frac{1}{2}$ b) $x < 1$
150. a) $x < -\frac{3}{4}$
b) $x < 0$ tai $x > \frac{1}{9}$
151. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
152. –

3.1 Funktion kulku

153. kasvava, kun $x \geq 3$; vähenevä, kun $x \leq 3$
154. a) $x \in]-\infty, -4]$, $x \in [2, 6]$
b) $x \in]-4, 2[$, $x \in]6, \infty[$
155. a) $-5 \leq x \leq -2$ tai $3 \leq x \leq 5$
b) $-2 \leq x \leq 3$
156. a) $x \geq 4$
b) $-2 \leq x \leq 0$
157.



g kasvava, kun $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 3$
158. a) $x \leq \frac{3}{2}$ b) $x \geq -\frac{9}{4}$
159. a) $x \geq -\frac{1}{2}$ b) $x \leq 4$
160. $x \leq -3$ tai $x \geq -1$
161. kasvava, kun $x \leq -6$ tai $x \geq 7$; vähenevä, kun $-6 \leq x \leq 7$
162. a) kasvava, kun $-9 \leq x \leq 0$; vähenevä, kun $x \leq -9$ tai $x \geq 0$
b) vähenevä, kun $x \in \mathbf{R}$
163. –
164. kasvava, kun $x \leq -\frac{1}{3}$ tai $x \geq 1$; vähenevä, kun $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$
165. a) 1000 bakteeria
b) kun aikaa on kulunut $\frac{2}{3}$ h = 40 min
166. a) $A(x) = x^2 - 2x - 15$ $(x > 5)$
b) $x > 5$
167. 310 metristä lenkin loppuun
168. a) 94 m
b) kun etäisyys lyönti-pisteestä on yli 47 m
169. $a \geq 3$
170. $a \geq 1$
171. $g(1{,}000\,001)$
172. a) kasvava, kun $x \leq -4$; vähenevä, kun $x \geq -4$
b) kasvava, kun $x \leq 2$ tai $x \geq 4$; vähenevä, kun $2 \leq x \leq 4$
c) kasvava, kun $x \in \mathbf{R}$
d) vähenevä, kun $x \in \mathbf{R}$
173. a) $x \geq -6$ b) $x \leq -6$

174. $x \le \frac{4}{9}$ tai $x \ge 1$

175. kasvava, kun $x \le -\frac{10}{7}$ tai $x \ge \frac{4}{3}$; vähenevä, kun $-\frac{10}{7} \le x \le \frac{4}{3}$

3.2 Funktion ääriarvot

176. a) minimikohta 4, minimiarvo –5
b) maksimikohta –3, maksimiarvo 10, minimikohta 1, minimiarvo 0

177. a) minimikohta $x = -2$
b) maksimikohta $x = -4$; minimikohta $x = 0$

178. a) maksimikohta $x = 3$
b) maksimi 27

179. a) minimi –3
b) maksimi 5

180. maksimi $\frac{5}{27}$, minimi –1

181. a) minimikohta $x = -2$
b) ei ääriarvokohtia

182. a) $x = 0$ ja $x = \frac{4}{3}$
b) $x = 0{,}14$

183. Derivaatta on aina positiivinen, joten funktio on aidosti kasvava.

184. –

185. $c = 166$

186. a) $0 < T < 52$ (°C)
b) 26 °C
c) 211

187. a) $t = 2{,}5$ s
b) korkeus 33 m

188. a) 2,5 tuntia lääkkeen antamisesta, 2500 mg
b) 3 tuntia

189. a) $x \approx 7$ b) $x \approx 0$
c) Suurin arvo välillä $[-6, 9]$ on 4, pienin arvo välillä $[-6, 9]$ on –2.

190. a) suurinta arvoa ei ole, pienin arvo 1
b) suurin arvo 3, pienin arvo –2

191. suurin arvo kohdassa $x = -2$, $g(-2) = 5$

192. pienin arvo kohdassa $x = 3$, $r(3) = -22$

193. a) suurin arvo 1, pienin arvo –0,6
b) suurin arvo 4,3; pienin arvo –0,5

194. suurin arvo 18, pienin arvo 0

195. suurin arvo 246, pienin arvo –10

196. suurin arvo 9, pienin arvo –19

197. $x = -\frac{1}{2}$, summa $-\frac{1}{4}$

198. 10 °C

199. korkeimmillaan klo 15.15, matalimmillaan klo 0.00

200. a) Säiliö on tyhjä, kun $t = 20$.
b) $q(t) = -1040t + 20\,800$, tyhjenemisnopeus suurimmillaan tyhjennyksen alussa (kun $t = 0$)

201. suurin arvo 5 kohdassa $x = -2$, pienin arvo –6 kohdassa $x = -4$

202. maksimikohta $x = -\frac{1}{3}$, maksimiarvo $2\frac{5}{27}$, minimikohta $x = 1$, minimiarvo 1

203. $f(4) = -1$

204. 125 ja 125

205. $0{,}125 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$

3.3 Derivaatan geometrisia sovelluksia

206. suurin ala 1225 m^2, sivut 35 m

207. pituus 45 m, leveys 30 m

208. korkeus 39,5 cm, kanta 71 cm

209. leveys ja korkeus 3,4 m, pituus 3,0 m

210. 4,0 cm

211. neliön sivu 4 cm, korkeus 16 cm

212. pohjan leveys 17,5 cm, kourun reunan korkeus 8,75 cm

213. mitat 23,7 cm × 23,7 cm × 6,34 cm

214. suurin tilavuus 931, lieriön korkeus $6\frac{2}{3} \approx 6{,}67$

215. Säde voi vaihdella 0 cm:stä 8 cm:iin. Tilavuus saa suurimman arvonsa, kun säde on 5,3 cm.

216. kanta 8,0 cm, korkeus 2,0 cm

217. seinän suuntainen sivu 12 m, seinää vastaan kohtisuora sivu 6,0 m, suurin ala 72 m^2

218. mitat 2,25 m × 3,75 m

219. 45 l

220. korkeus 17 cm, säde 11 cm

3.3 Derivaatan sovelluksia talouselämästä

221. 55 %

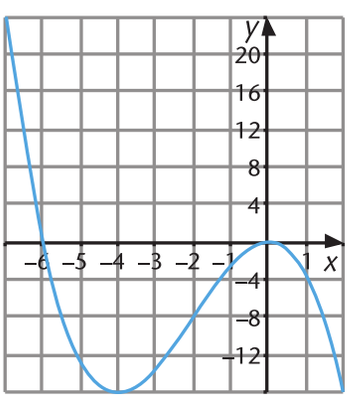
222. a) 22,70 € b) 30 €
c) suurin 28 400 €, pienin 25 500 €

223. 2,0 €

224. 200 €

225. 224 € – 308 €
226. 26 €
227. 0,50 €
228. a) alennusmyynnin 5. päivänä
b) 32 000 €
229. a) yhteensä 28 työntekijää
b) 159 600 €
230. 2,05 €
231. 30,15 €
232. 14,60 €

4 Kertausosa

1. a) $x = -16$
b) $x = -3$ tai $x = 1$
2. a) ylös b) alas
3. a) $x = 5$
b) $x = 2$ tai $x = \frac{3}{4}$
4. a) ei b) kyllä
5. a) $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$
b) $(0, -2)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$
6. a) $0 \le x \le 3$
b) $-5 \le x < 15$
c) $x > 0{,}2$
d) $x \le 12$
7. a) $x \in \,]1, 8[$
b) $x \in \,]26, 30]$
c) $x \in [-4, \infty[$
8. a) $x \ge 1$ b) $x \le 2$
9. a) $x < 2$ tai $x > 8$
b) $x < -1$ tai $0 < x < 1$
c) ei millään x:n arvolla
d) $x \ne -6$
10. a) $x > \frac{2}{3}$ b) $x \ge \frac{15}{8}$
11. a) $1 \le x \le 2$
b) $0 < x < \frac{1}{5}$
12. $x < 0$ tai $x > 2$
13. a) 1 b) 3 c) 0
14. a) noin 2 b) noin –4
15. a) $x \approx 1$ b) $x = 0$
16. $f(0) \approx -4$, $f'(0) \approx -2$
$f(2) \approx -6$, $f'(2) \approx 0$
17. a) 2 b) $x \approx 4$
18. $f'(1) \approx 1{,}4$, $f'(3) \approx 5$
19. a) $x \approx -1{,}5$; $x \approx 9{,}5$
b) $x \approx 0$, $x \approx 4$, $x \approx 8$
20. a) 0 b) 5
c) $4x^3$ d) -3
e) $-28x^6$ f) $2x + 6$
21. a) $6x^2 - 10x - 1$
b) $24t - 3$
c) $50a - 60$
d) $9x^2 - 2$
22. $Q(-2) = 24$,
$Q'(-2) = -36$
23. –
24. a) 3 b) $46\frac{1}{2}$
25. a) $x = \frac{2}{5} = 0{,}4$
b) $x = 6$ tai $x = -2$
26. $t = 3$
27. $x = -2$ tai $x = \frac{2}{3}$
28. $(3, 24)$
29. a) $x \approx 0$, $x \approx 4$, $x \approx 8$
b) $0 < x < 4$ tai $x > 8$
c) $x < 0$ tai $4 < x < 8$
30. $x \ge 3$
31. $0 \le x \le 4$
32. –
33. a) $x \le -1$ tai $x \ge 2$
b) $-2 \le x \le 0$ tai $x \ge 3$
34. $t \le -1$ tai $t \ge 3$
35. 

$g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$
36. $f(-4{,}999) < f(-4{,}998)$
37. minimi $f(-2) \approx 1$
minimi $f(2) \approx -1$
maksimi $f(0) \approx 3$
38. a) minimi –4
b) minimi $-2\frac{1}{3}$
maksimi $\frac{13}{48}$
39. $a = 5$, minimi on 1
40. 18 m
41. a) $f(1) \approx 6$
b) suurin arvo noin 4, pienin arvo noin 1
c) suurin arvo kohdassa $x \approx -1$, pienin arvo kohdassa $x \approx -3$
d) $[0, 3]$
42. suurin arvo 89, pienin arvo –9
43. a) $[0, 8]$
b) suurin pitoisuus 1,4 ‰ 4 tunnin kuluttua
44. 5,5 m × 11 m
45. 102 cm^3
46. 78 ha
47. 32 €:n hinnalla, myyntitulo 5120 €
48. 7,25 €

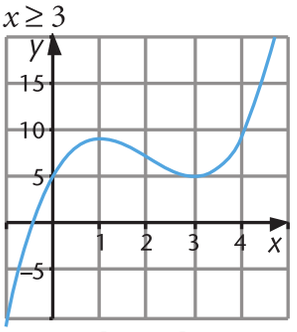
1. Harjoituskoe

1. a) ylös
b) $x = -\frac{3}{5}$, $x = \pm 2$
c) $(0, -1)$, $(0, -6)$
d) $f(-1) = 3$, $g(-1) = -6$
2. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, piste kuuluu kuvaajalle
3. $-0{,}5 \le x \le 1$, huippupiste $\left(\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}\right)$
4. a) Molemmat kateetit ovat $12 - \frac{1}{2}x$.
b) $\frac{1}{8}x^2 - 6x + 72$
5. a) $f'(x) = 4$
b) $f'(x) = 15x^2 - 12x$
c) $f'(x) = 2x - 2$
d) $f'(x) = 20x^4 - 6x^2 + x$

6. a) $t \geq -\frac{3}{2}$
   b) $g(-3) = -16$;
   funktion kuvaaja kulkee pisteen $(-3, -16)$ kautta.
   $g'(-3) = -6$;
   kuvaajan kohtaan $(-3, -16)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on -6.
7. maksimi $g(-2) = 7$ ja minimi $g(0) = -1$, ei suurinta arvoa
8. suurin arvo -4, pienin arvo -179

2. Harjoituskoe

1. a) $f(0) \approx -1$, $f(-2) \approx 1$
   b) $x \approx -3$, $x \approx -1$, $x \approx 2$, $x \approx 4$
   c) $x \approx -3$, $x \approx -2$, $x \approx 1$, $x \approx 3$, $x \approx 4$
   d) pienin arvo -2
   e) suurin arvo 0
2. a) $x > -1$
   b) $x \leq -3$ tai $x \geq 4$
3. a) $-4t^3 + \frac{9}{5}t^2 - 1$
   b) $-4r$
   c) $-4x^3 - 9x^2 + 12x + 18$
4. maksimiarvo $f(1) = 9$, minimiarvo $f(3) = 5$
   kasvava, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 3$



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

5. $a = 9$
6. korkeus 1,4 m, tilavuus 6,3 m^3
7. 30 m^2

3. Harjoituskoe

1. a) $x < -2$
   b) $f'(-1) = 22$, $x = \frac{4}{7}$
2. a) suljetulla välillä $[1, 2]$
   b) $0 \leq x \leq 2$
3. a) 1,25 m b) 39 cm
4. a) suurin arvo 12, pienin arvo -4
   b) ei suurinta arvoa, pienin arvo 32
5. peilin mitat ilman kehyksiä 19 cm × 19 cm
6. 2145 €
7. pystyy

5 Ekstrat

1. a) $-3 \leq x \leq 9$
   b) $0 < x < 2$
   c) $-1 < x \leq 3$
2. a) $x \leq 12$
   b) $x \geq 1$
   c) $x > -4$
3. a) $x \in [2, 20]$
   b) $x \in]-5, 0[$
   c) $x \in [8, 10[$
4. a) $x \in]-\infty, 3]$
   b) $x \in]-\infty, -5[$
   c) $x \in [27, \infty[$
5. –
6. a) $0 \leq x \leq 6$
   b) $x \leq -1$
   c) $x > -5$
   d) $-10 \leq x < 8$
7. a) $x \in [4, 6]$
   b) $x \in]-3, \infty[$
   c) $x \in [1, \infty[$
   d) $x \in]8, 30]$
8. $x = 2$
9. $x = \frac{-2 - \sqrt{88}}{-6} \approx 1{,}9$
10. $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$
11. $x = -0{,}13$
12. a) 27° b) −37°
    c) 63° d) −72°
13. a) 11,3° b) −78,7°
14. a) B b) A
15. −63,43°, 11,31°, −33,69°; nouseva $y = 0{,}2x - 2$, muut laskevia
16. −2,76
17. 4,1
18. 2,21
19. $x \approx 0{,}57$
20. a) kappale edennyt 10 m
    b) 5,0 $\frac{m}{s}$
21. a) 1 $\frac{m}{s}$ b) 2 $\frac{m}{s^2}$
22. $t(s) = \begin{cases} \frac{s}{14}, & \text{kun } s \leq 45 \\ \frac{45}{14} + \frac{s - 45}{18}, & \text{kun } 45 < s < 60 \end{cases}$

    $t'(15) = \frac{1}{14}$
23. a) 11° b) 55°
24. a) 4 $\frac{m}{s}$ b) 16,5 $\frac{m}{s^2}$
25. a) hetkellä $t = 5{,}0$ s, $v \approx 204 \frac{km}{h}$
    b) hetkellä $t = 9{,}0$ s, $v = 180 \frac{km}{h}$

Hakemisto

A
aidosti kasvava funktio 148
aidosti vähenevä funktio 149
avoin väli 142

D
derivaatan nollakohta 65
derivaatta 44
derivoimiskaava 54

F
funktio 8
funktion arvo 8
funktion kulkusuunta 86
funktion merkki 17

G
globaali maksimi 104
globaali minimi 104
graafinen derivointi 44

H
haarukointi 153
hetkellinen muutosnopeus 35

K
kasvava funktio 86, 148
keskimääräinen muutosnopeus 33
kulmakerroin 9
kuvaaja 8

L
lähiympäristö 98

M
merkkikaavio 76
monotonisuus 86

N
nollakohta 10

P
paikallinen maksimi 99, 101
paikallinen maksimiarvo 99
paikallinen maksimikohta 99
paikallinen minimi 98, 101
paikallinen minimiarvo 98
paikallinen minimikohta 98
paraabeli 12
paraabelin huippu 12
paraabelin huippukohta 12
pienin arvo 104, 106
polynomifunktio 8
puoliavoin väli 143

S
suljettu väli 142
summan derivointi 58
suora 9
suuntakulma 146
suurin arvo 104, 106
symmetria-akseli 12

T
tangentti 35
terassikohta 99
testiarvo 80
toinen derivaatta 155
toisen asteen epäyhtälö 23

V
vakion siirtosääntö 58
vakiotermi 9
vähenevä funktio 87, 149

Ä
ääriarvo 98
ääriarvokohta 98